

Tentamen Envariabelanalys 2, 130607, kl 8-13.

Inga hjälpmedel tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. 8 poäng med minst tre uppgifter med minst två poäng vardera ger betyget Godkänd. 14 poäng med minst fem uppgifter med minst två poäng vardera ger betyget Väl Godkänd. Alla lösningar ska vara fullständiga och välmotiverade.

1. Finn den lösning till differentialekvationen $y'' + 2y' + y = (3x + 1)e^{2x}$, som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
2. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då området mellan kurvorna $y = \sin x$ och $y = -\sin x$, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ och linjen $x = \pi/2$ roteras kring y -axeln.
3. Avgör om följande är konvergenta.

$$(a) \int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{1 - \cos 2x} dx, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\ln k}, \quad (c) \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{k^3 - 1}.$$

4. Bestäm den lösning $y = y(x)$ till differentialekvationen

$$xy' + 2y = \frac{1}{x^2 + x}, \quad x > 0,$$

som uppfyller att $x \cdot y(x) \rightarrow 1$, då $x \rightarrow 0^+$.

5. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x-x^2} - \cos 2x - \ln(1 + x + 2x^2)}{x^3}.$$

6. För vilka reella tal x är potensserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} (e^{1/k^2} - 1) x^k$$

konvergent?

7. Låt

$$S(x) = \int_0^x \ln(\cos t) dt,$$

där $|x| < \frac{\pi}{2}$. Bestäm ett polynom som för $|x| < \frac{\pi}{4}$ approximerar $S(x)$ med ett fel vars absolutbelopp är mindre än $\frac{|x|^5}{3}$.