

Tentamen Envariabelanalys 1, 140422, kl 8-13.

Inga hjälpmedel tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. 8 poäng med minst tre uppgifter med minst två poäng vardera ger betyget Godkänd. 14 poäng med minst fem uppgifter med minst två poäng vardera ger betyget Väl Godkänd. Alla lösningar ska vara fullständiga och välmotiverade. Svar ska anges tydligt och vara förenklade så långt som möjligt.

1. Bestäm följande primitiva funktioner.

$$(a) \int \cos(\sqrt{x+1}) \, dx, \quad (b) \int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} \, dx, \quad (c) \int \frac{5}{x^3 - 4x^2 + 5x} \, dx.$$

2. Beräkna följande gränsvärden.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x)}{\sin 4x}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 - x - 2}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{2x} - 1)}{x}.$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = (x^2 - 3)e^x$. Ange alla lokala maxima och minima samt asymptoter om de finns.
4. (a) Antag att funktionen f är definierad i en omgivning av a . Ange definitionen av att f är kontinuerlig i a .
- (b) Antag att funktionen f är definierad i en omgivning av a . Ange definitionen av att f är deriverbar i a .
- (c) Bestäm värdemängden av funktionen $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

5. Avgör om de generaliserade integralerna

$$\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \, dx, \quad \text{och} \quad \int_1^\infty \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \, dx,$$

är konvergenta, och bestäm isåfall deras värden.

6. Låt $f(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$.

- (a) Bestäm $f'(x)$ och $f''(x)$.
- (b) Bestäm funktionens samtliga lokala maxima och minima.
- (c) Avgör var funktionen är konvex respektive konkav.

7. Bestäm, för alla heltal $n \geq 0$ och $m \geq 0$, den primitiva funktionen

$$\int \cos(nx) \cos(mx) \, dx.$$