

Tentamen Envariabelanalys 1, 140612, kl 8-13.

Inga hjälpmedel tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. 8 poäng med minst tre uppgifter med minst två poäng vardera ger betyget Godkänd. 14 poäng med minst fem uppgifter med minst två poäng vardera ger betyget Väl Godkänd. Alla lösningar ska vara fullständiga och välmotiverade. Svar ska anges tydligt och vara förenklade så långt som möjligt.

1. Beräkna följande gränsvärden.

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+4x)}, \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (2^{1-x})^{1/x}, \quad (c) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+3^{-x})}{\ln(1+4^{-x})}.$$

2. Bestäm följande primitiva funktioner.

$$(a) \quad \int \frac{x^2}{x^2-4} dx, \quad (b) \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} dx, \quad (c) \quad \int x^2 e^{2x} dx.$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-4}$. Ange alla lokala maxima och minima samt asymptoter om de finns.

4. Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} \frac{7 \cos x}{(2 + \sin x)(4 - \cos^2 x)} dx.$$

5. Beräkna följande generaliserade integraler.

$$(a) \quad \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} dx, \quad (b) \quad \int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2} dx, \quad (c) \quad \int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx.$$

6. (a) Bevisa formeln för partiell integration, dvs

$$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx,$$

där F är en primitiv funktion till f . (1p)

- (b) Beräkna (2p)

$$\int (\sin 2x)(\sin 4x) dx.$$

7. (a) Bestäm värdemängden för funktionen $f(x) = x^{1/x}$, då $x > 0$. (2p)

- (b) Bestäm, för varje $a > 0$, antalet lösningar till ekvationen $a^x = x^a$. (1p)