

Tentamen Envariabelanalys 2, 140822, kl 8-13.

Inga hjälpmedel tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. 8 poäng med minst tre uppgifter med minst två poäng vardera ger betyget Godkänd. 14 poäng med minst fem uppgifter med minst två poäng vardera ger betyget Väl Godkänd. Alla lösningar ska vara fullständiga och välmotiverade.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' + 4y' + 3y = (8x - 4)e^{-3x},$$

som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 2$ och $y'(0) = 0$.

2. Beräkna volymen av den kropp som bildas då området mellan kurvorna $y = 2 - x^2$, och $y = \sin \frac{\pi x}{2}$, då $0 \leq x \leq 1$, roteras kring x -axeln.

3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$(1 + \sqrt{x})y' - \frac{y}{2\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x},$$

för $x > 0$.

4. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\ln(1+x)} - \frac{\sqrt{1+x}}{e^x - 1} \right).$$

5. Avgör om följande serier är konvergenta.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2 + 1}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k + 1}, \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{k}} \right).$$

6. För vilka reella tal x är potensserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{6^k \sqrt{k}},$$

konvergent?

7. Bestäm alla funktioner f och g sådana att $f'(x) = g(x)$ och $g'(x) = f(x)$ för alla reella tal x , och dessutom $f(0) = 1$ och $g(0) = 0$.