

Tentamen Envariabelanalys 1, 150825, kl 8-13.

Inga hjälpmedel tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. 8 poäng med minst tre uppgifter med minst två poäng vardera ger betyget Godkänd. 14 poäng med minst fem uppgifter med minst två poäng vardera ger betyget Väl Godkänd. Alla lösningar ska vara fullständiga och välmotiverade. Svar ska anges tydligt och vara förenklade så långt som möjligt.

1. Bestäm, för varje reellt k antalet lösningar till ekvationen $\frac{x^2 - 7x + 8}{x + 1} = k$.

2. Undersök följande gränsvärden.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$, (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\sqrt{1+x} - \sqrt{2+x})$, (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \cos(3x)}{\ln(1-3x)}$.

3. (a) Antag att f är en funktion definierad i en omgivning till $c \in \mathbb{R}$. Definiera vad som menas med att f är kontinuerlig i c .

(b) Är g kontinuerlig i 0 om

$$g(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{om } x \geq 0, \\ 2x + 1, & \text{om } x < 0? \end{cases}$$

(c) Låt g vara samma funktion som i (b). Är g deriverbar i 0?

4. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} dx,$$

eller visa att den är divergent.

5. Rita grafen för funktionen $f(x) = \arctan \frac{x-1}{x+1}$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

6. För vilka reella a är $\int_a^{2a} e^{-x^2} dx$ som störst?

7. Låt f och g vara funktioner som är kontinuerliga på $[a, b]$ och deriverbara på (a, b) . Antag att $f(a) = f(b) = 0$ och att $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$ för alla $x \in (a, b)$. Visa att g har minst ett nollställe på $[a, b]$.