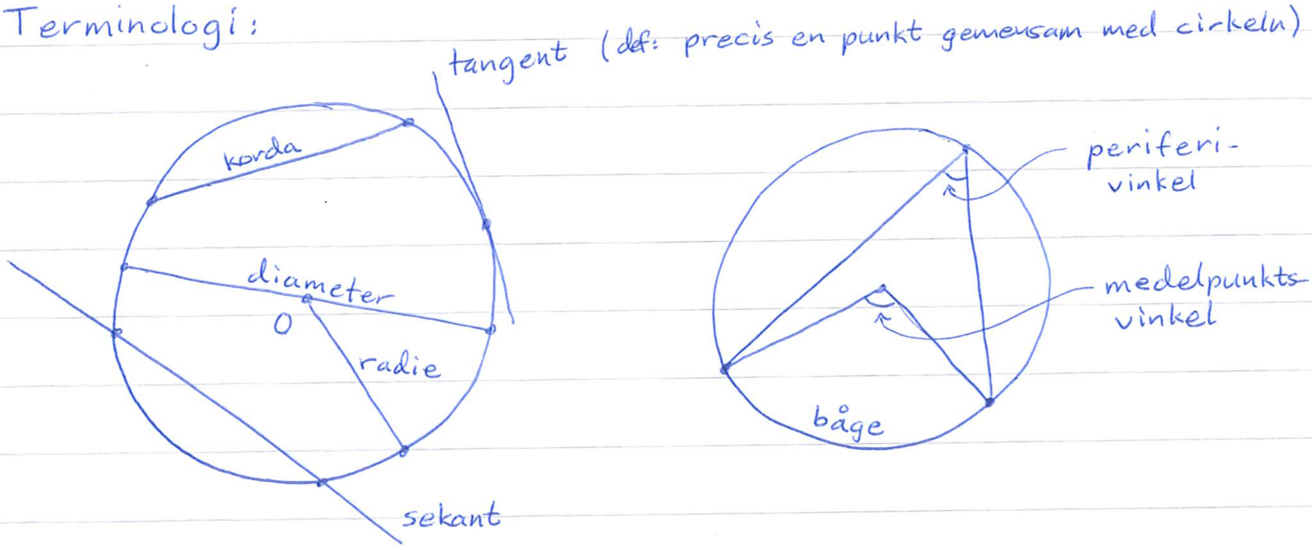
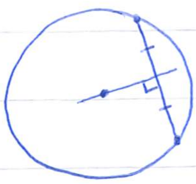
Cirklar

Def Givet en punkt O och ett positivt tal r består *cirkeln* med *medelpunkt* O och *radie* r av de punkter vars avstånd till O är r.

Terminologi:

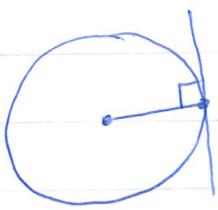


Sats En cirkels medelpunkt ligger på varje kordas mittpunktsnormal.



B Se kompendiet (5.3).

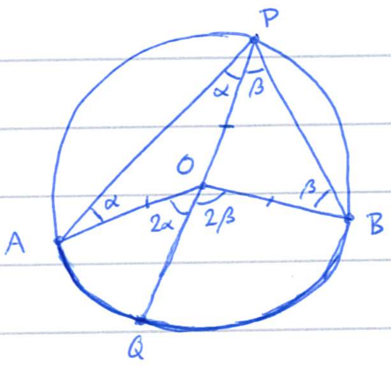
Sats En linje genom en punkt på en cirkel är tangent till cirkeln omm den är vinkelrät mot radien genom punkten.



B Se kompendiet (5.5).

Periferivinkelsatsen Medelpunktsvinkeln på en båge är dubbelt så stor som en periferivinkel på samma båge.

B



Dra diametern genom P. OA och OP är radier, så ΔOAP är likbent, så basv.s. ger $\angle OAP = \angle OPA =: \alpha$. P.s.s. fås $\angle OBP = \angle OPB =: \beta$.

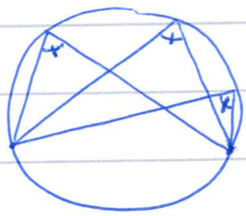
Yttervs. ger $\angle AOQ = 2\alpha$ och $\angle BOQ = 2\beta$.

Så $\angle AOB = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha+\beta) = 2\angle APB$,

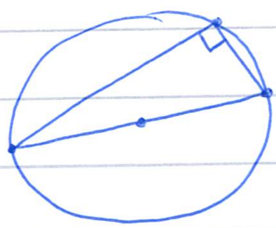
dvs medelp.v. $=$ 2·perif.v.

Följdsatser

- Alla periferivinklar på samma båge är lika stora.

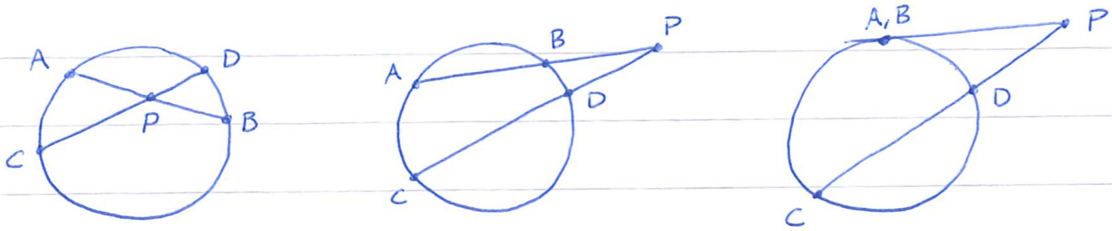


- En periferivinkel på en halvcirkelbåge är rät.



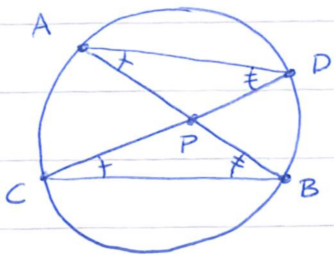
Kordasatsen

I figurerna



gäller: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

B av första figuren, övriga: se kompendiet.

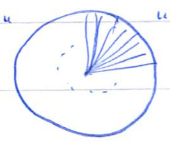


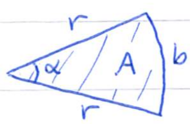
Dra AD och CB. $\angle A$ och $\angle C$ är perif.v. på bågen DB, så $\angle A = \angle C$.
P.s.s. $\angle D = \angle B$, så $\Delta ADP \sim \Delta CBP$ (VV),
så $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PD}{PB}$, vilket ger $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Omkrets och area

$\dfrac{\text{Omkrets}}{\text{Diameter}} = \pi = 3,1415\ldots$, samma för alla cirklar,

så omkretsen $O = \pi \cdot 2r = 2\pi r$.

Arean av en cirkel är $A = \dfrac{O \cdot r}{2}$: "", så $A = \pi r^2$.

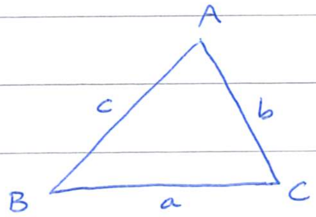
För en cirkelsektor 

gäller:

båglängd $b = \dfrac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \alpha r$

area $A = \underbrace{\dfrac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2}_{\alpha \text{ mätt i grader}} = \underbrace{\dfrac{1}{2}\alpha r^2}_{\alpha \text{ mätt i radianer}}$

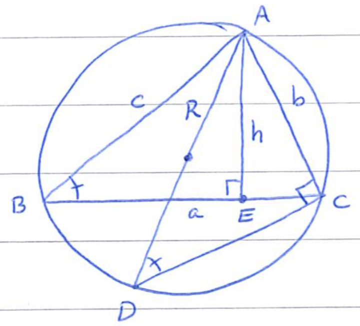
T21.



Sätt $T = |\triangle ABC|$,

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

a) Omskrivna cirkelns radie $R = \dfrac{abc}{4T}$:

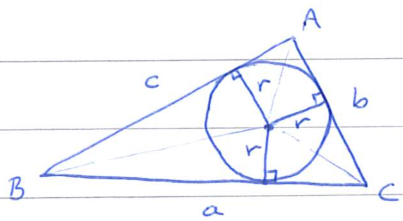


$T = \dfrac{ah}{2} \Rightarrow h = \dfrac{2T}{a}$.

$\triangle ABE \sim \triangle ADC$ (VV) $\Rightarrow \dfrac{c}{h} = \dfrac{2R}{b}$,

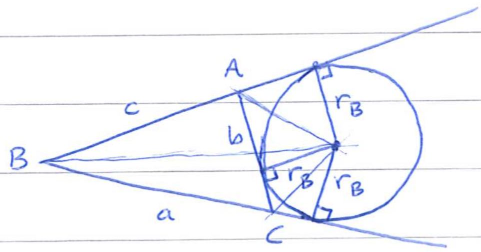
så $R = \dfrac{bc}{2h} = \dfrac{bc}{2 \cdot \frac{2T}{a}} = \dfrac{abc}{4T}$.

b) Inskrivna cirkelns radie $r = \dfrac{T}{p}$:



$T = \dfrac{ar}{2} + \dfrac{br}{2} + \dfrac{cr}{2} = pr$, så $r = \dfrac{T}{p}$.

c) Vidskrivna cirklarnas radier är $r_A = \dfrac{T}{p-a}$, $r_B = \dfrac{T}{p-b}$, $r_C = \dfrac{T}{p-c}$:



$$T = \frac{ar_B}{2} + \frac{cr_B}{2} - \frac{br_B}{2} =$$

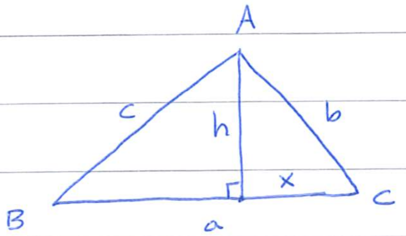
$$= \frac{a+c-b}{2} \cdot r_B =$$

$$= \frac{a+b+c-2b}{2} r_B =$$

$$= (p-b) r_B,$$

så $r_B = \dfrac{T}{p-b}$.

d) <u>Herons formel</u> $T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$:



$$x^2 + h^2 = b^2 \quad \text{och} \quad (a-x)^2 + h^2 = c^2$$

ger $(a-x)^2 + \cancel{h^2} - x^2 - \cancel{h^2} = c^2 - b^2$,

$$a^2 - 2ax + \cancel{x^2} - \cancel{x^2} = c^2 - b^2,$$

så $x = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$ ($x \leq 0$ möjligt men inget problem här).

$$T = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2\left(b^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16}\left(4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16}(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16}\left((a+b)^2 - c^2\right)\left(-(a-b)^2 + c^2\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

$(16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$ $\quad = \sqrt{p(p-c)(p-b)(p-a)}$.