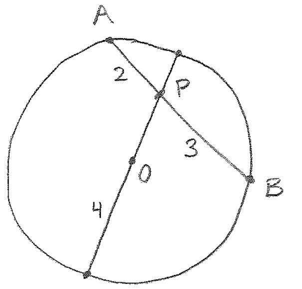
Lösningar, 91MA12 etc, 2019-09-11

1.



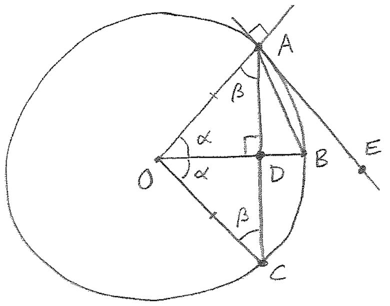
Dra diametern genom P.

Kordasatsen ger: $(4+OP)(4-OP) = 2\cdot 3$,

så $16 - OP^2 = 6$, $OP^2 = 10$.

Svar: $\sqrt{10}$ cm.

2.



Sätt $\alpha = \angle AOB = \angle BOC$. Dra AB och AC.

$OA = OC$, så $\angle OAC = \angle OCA = \beta$ (basv.s.).

$\angle ODA = 180° - \alpha - \beta = \angle ODC$, så

$\angle ODA = 90°$. Tangent $\perp$ radie,

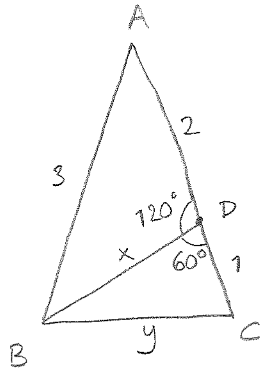
så $\angle OAE = 90°$, och nu får vi

att $\angle CAE = 90° - \beta = \alpha$.

Periferiv.s. ger att $\angle CAB = \frac{1}{2}\angle COB = \frac{1}{2}\alpha$,

så $\angle CAB = \frac{1}{2}\angle CAE$, vilket skulle visas.

3.



$180° - 60° = 120°$, så cosinussatsen ger

$3^2 = 2^2 + x^2 - 2\cdot 2x\cos 120°$, $(\cos 120° = -1/2)$

$5 = x^2 + 2x$, $6 = (x+1)^2$, $x = \underset{(-)}{+}\sqrt{6} - 1$.

Cosinussatsen ger nu att

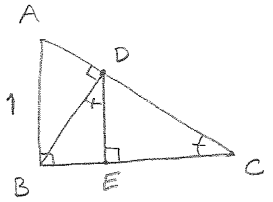
$y^2 = x^2 + 1^2 - 2\cdot x\cdot 1\cos 60° = x^2 + 1 - x =$

$= (\sqrt{6}-1)^2 + 1 - (\sqrt{6}-1) = 6 - 2\sqrt{6} + 1 + 1 - \sqrt{6} + 1 =$

$= 9 - 3\sqrt{6}$.

Svar: $\sqrt{9-3\sqrt{6}}$ cm.

4.



$DE \parallel AB$, så $\angle E = \angle B = 90^\circ$ (alt.v.s.).

För areorna gäller att $\dfrac{EC \cdot DE}{2} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{BC \cdot AB}{2}$,

så $\dfrac{EC}{BC} \cdot \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{1}{3}$. $\Delta DEC \sim \Delta ABC$ (Topp-Δ-s.),

så $\dfrac{EC}{BC} = \dfrac{DE}{AB}$, vilket ger att $\left(\dfrac{DE}{AB}\right)^2 = \dfrac{1}{3}$, och det följer

att $DE = \dfrac{1}{\sqrt{3}} AB = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, och att $EC = \dfrac{1}{\sqrt{3}} BC$.

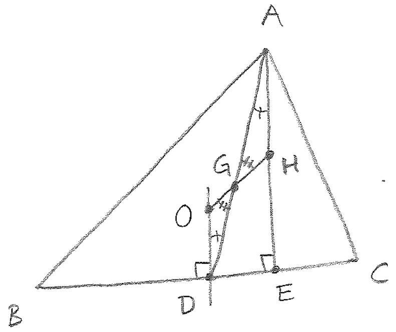
$\angle BDE = 90^\circ - \angle EDC = \angle C$, så $\Delta DEC \sim \Delta BED$ (VV),

så $\dfrac{EC}{DE} = \dfrac{ED}{BE}$, $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}} BC}{1/\sqrt{3}} = \dfrac{1/\sqrt{3}}{BC - \frac{1}{\sqrt{3}} BC}$, $BC = \dfrac{1}{(\sqrt{3}-1)BC}$.

Svar: $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{3}-1}}$ cm.

5. Se kompendiet.

6.



Dra mittpunktsnormalen OD, höjden AE och medianen AD. Dra OG och förläng till skärningspunkten H. Alternatv.s. ger först att $OD \parallel AE$, och sedan att $\angle GAH = \angle GDO$. Vertikalvinklarna vid G är lika, så $\Delta GAH \sim \Delta GDO$ (VV). Eftersom G delar medianen AD i förhållandet $1:2$ fås nu att $\dfrac{OG}{GH} = \dfrac{DG}{GA} = \dfrac{1}{2}$, vilket skulle visas.