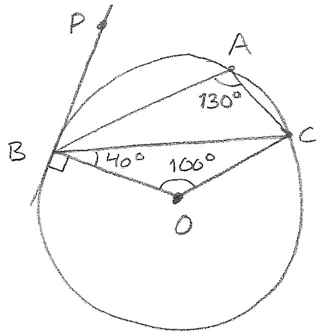
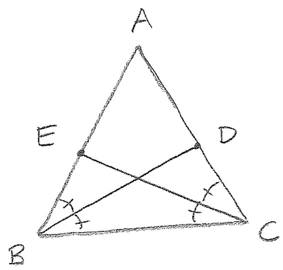
Lösningar, 91MA12, 92MA12, 2020-06-09

1.



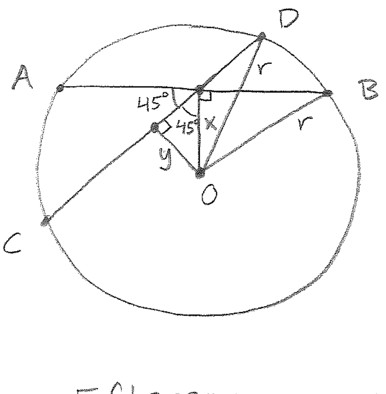
Av periferivinkelsatsen följer att $\angle BOC = 360° - 2\cdot\angle A = 100°$.
Triangeln BOC är likbent, så basvinkelsatsen ger $\angle OBC = \angle OCB$, så
$\angle OBC = \frac{180° - 100°}{2} = 40°$. Radien OB är vinkelrät mot tangenten BP, så
$\angle PBC = 90° - 40° = 50°$. Svar: $50°$.

2.



Givet: $AB = AC$.
Låt BD och CE vara bisektriser till $\angle B$ resp. $\angle C$. Basvinkelsatsen ger att $\angle DBC = \frac{\angle ABC}{2} = \frac{\angle ACB}{2} = \angle ECB$.
Detta ger att $\triangle DBC \cong \triangle ECB$ (VSV), så: $BD = CE$.

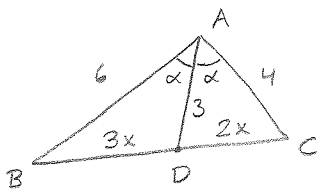
3.



Beteckningar enligt figur.
$AB = 2$ cm, $r = \frac{3}{2}$ cm.
Pythagoras sats ger att
$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + x^2 = r^2$, dvs $1 + x^2 = \frac{9}{4}$,
$x^2 = \frac{5}{4}$, och att $\left(\frac{CD}{2}\right)^2 + y^2 = r^2$.
Eftersom $y = x\cdot\cos 45° = \frac{x}{\sqrt{2}}$, fås nu
$\frac{CD^2}{4} + \frac{5}{8} = \frac{9}{4}$, $CD^2 = 4\cdot\frac{13}{8} = \frac{13}{2}$.

Svar: $\sqrt{13/2}$ cm.

4.



Bisektrissatsen ger $\frac{BD}{CD} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, så vi sätter $BD = 3x$, $CD = 2x$.

Cosinussatsen ger nu:

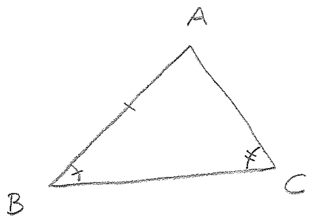
$(3x)^2 = 6^2 + 3^2 - 2\cdot6\cdot3\cos\alpha$ (1), och $(2x)^2 = 3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cos\alpha$ (2).

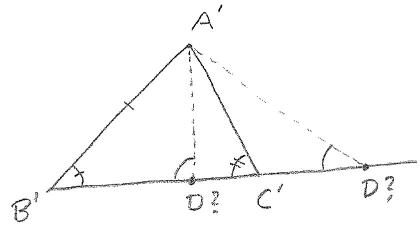
$2\cdot(1) - 3\cdot(2)$ ger $2\cdot9x^2 - 3\cdot4x^2 = 2\cdot45 - 3\cdot25$, dvs

$6x^2 = 15$, $x = \sqrt{5/2}$.

Svar: $5\sqrt{5/2}$ cm.

5.



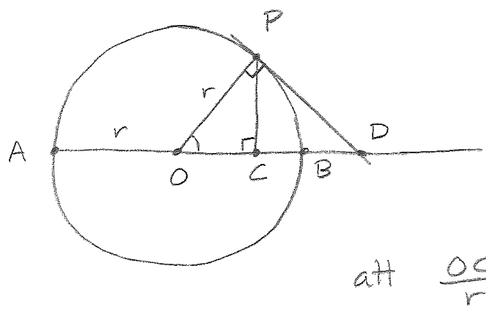


Givet: $AB = A'B'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$.

Sätt ut D på strålen $B'C'$ så att $B'D = BC$.

Då fås att $\triangle ABC \cong \triangle A'B'D$ (SVS), så $\angle A'DB' = \angle ACB = \angle A'C'B'$. Men om $D \neq C'$ ger yttervinkelsatsen i triangeln $A'C'D$ att $\angle A'DB' \neq \angle A'C'B'$. Alltså måste $D = C'$, så $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

6.



Kalla cirkeln radie r och dra radien OP, som är vinkelrät mot tangenten vid P.

$\triangle OCP \sim \triangle OPD$ (VV), vilket ger att $\frac{OC}{r} = \frac{r}{OD}$, eller: $r^2 = OC\cdot OD$. Nu fås:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{r+OC}{r-OC} = \frac{r^2+r\cdot OC}{r^2-r\cdot OC} = \frac{OC\cdot OD + r\cdot OC}{OC\cdot OD - r\cdot OC} = \frac{OD+r}{OD-r} = \frac{AD}{BD}.$$