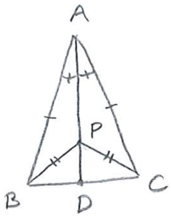
Lösningar, 91/92MA12, 2024-09-11

1.



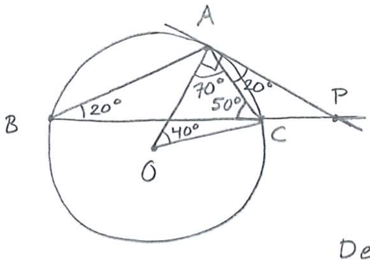
Givet: $AB = AC$ och $PB = PC$.

$\triangle ABP \cong \triangle ACP$ (SSS), så $\angle BAP = \angle CAP$.

Nu fås $\triangle BAD \cong \triangle CAD$ (SVS), så $BD = CD$,

och D är alltså mittpunkt på BC.

2.

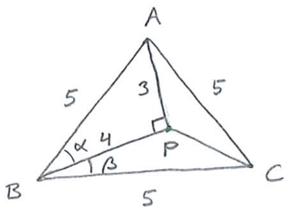


Dra OA och OC. OA är vinkelrät mot tangenten, och perif.v.s. ger att $\angle AOC = 2 \cdot 20° = 40°$. $\triangle AOC$ är likbent, så $\angle OAC = (180° - 40°)/2 = 70°$ (bas.v.s.).

Detta ger att $\angle CAP = 90° - 70° = 20°$, så ytterv.s. ger att $\angle CPA = 50° - 20° = 30°$.

<u>Svar:</u> $30°$.

3.



$\triangle APB$ är rätvinklig $(3^2 + 4^2 = 5^2)$, och $\angle ABC = 60°$ (ty $\triangle ABC$ liksidig), så

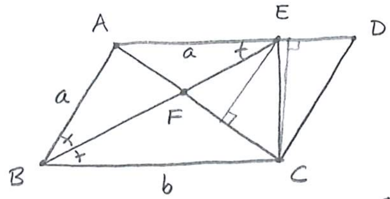
$$\cos\beta = \cos(60° - \alpha) = \cos 60° \cos\alpha + \sin 60° \sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{2 \cdot 5}.$$ Cosinussatsen ger nu:

$$PC^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos\beta = 16 + 25 - 16 - 12\sqrt{3} = 25 - 12\sqrt{3}.$$

<u>Svar:</u> $\sqrt{25 - 12\sqrt{3}}$ cm.

4.



$\dfrac{|\triangle ACD|}{|\square ABCD|} = \dfrac{1}{2}$. $\angle AEB = \angle EBC$ (alt.v.s.), så $\triangle ABE$ är likbent (basv.s.), dvs $AE = a$.

Dra EC. $\dfrac{|\triangle AEC|}{|\triangle ADC|} = \dfrac{a}{b}$ (samma höjd från C).

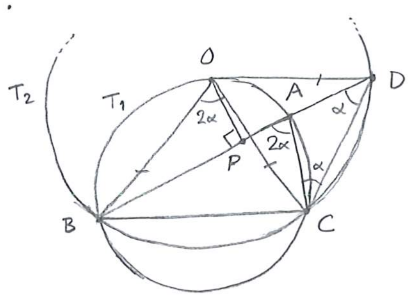
$\dfrac{|\triangle AFE|}{|\triangle ACE|} = \dfrac{AF}{AC}$ (samma höjd från E), och $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AF}{AF+FC} =$

$= \dfrac{AF/FC}{(AF/FC)+1} \overset{\text{bis.s.}}{=} \dfrac{a/b}{(a/b)+1} = \dfrac{a}{a+b}$. Sammantaget ger detta att

$\dfrac{|\triangle AEF|}{|\square ABCD|} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{a+b}$. <u>Svar:</u> $\dfrac{a^2}{2b(a+b)}$.

5. Se kompendiet.

6.



Kalla den givna cirkeln för T_1. Dra cirkeln T_2 med medelpunkt O genom B och C, och förläng BA tills T_2 träffas i D. Dra OD. Vi får:

$BP = \sqrt{OB^2 - OP^2} = \sqrt{OD^2 - OP^2} = DP$. Dra DC.

Sätt $\alpha = \angle BDC$. Perif.v.s. i T_2 ger: $\angle BOC = 2\cdot\angle BDC = 2\alpha$.

Perif.v.s. i T_1 ger: $\angle BAC = \angle BOC = 2\alpha$.

Yttev.s. ger nu att $\angle ACD = \angle CAB - \angle CDA = 2\alpha - \alpha = \alpha$, så $AC = AD$ (basv.s.). Detta ger att:

$\underline{\underline{PB}} = PD = PA + AD = \underline{\underline{PA + AC}}$.