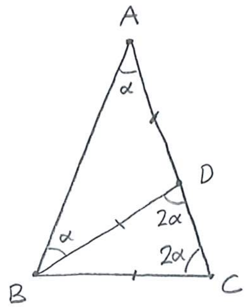
Lösningar, 91/92MA12, 2025-01-08

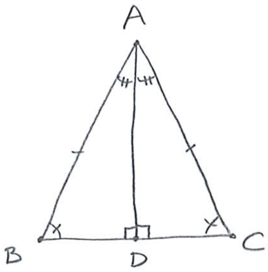
1.



Sätt $\alpha = \angle A$. Vi får $\angle ABD = \alpha$ (basv.s.), $\angle BDC = \alpha + \alpha = 2\alpha$ (yttervv.s.), $\angle BCD = 2\alpha$ (basv.s) och $\angle ABC = 2\alpha$ (basv.s. ty $AB = AC$). Vinkelsumma i ΔABC ger: $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$, $5\alpha = 180^\circ$, så:

<u>Svar:</u> 36°.

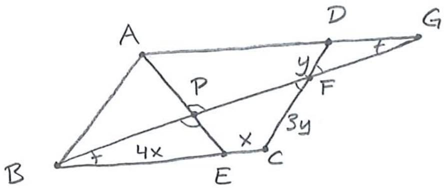
2.



Givet: $AB = AC$, $AD \perp BC$.

Basv.s. ger att $\angle ABC = \angle ACB$. Så $\angle BAD =$
$= 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - \angle ACB = \angle CAD$,
vilket ger att $\Delta BAD \cong \Delta CAD$ (VSV),
så <u>$BD = CD$</u>.

3.



Med $EC = x$ och $FD = y$ fås $BE = 4x$ och $CF = 3y$. Förläng BF och AD tills de möts i G.

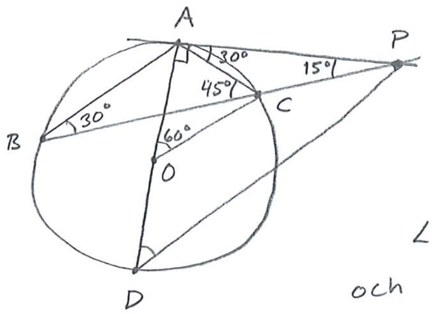
$\angle FBC = \angle FGD$ (alt.v.s.), och vertikalv. vid F lika, så $\Delta FBC \sim \Delta FGD$ (VV), så $\dfrac{DG}{5x} = \dfrac{y}{3y}$, $DG = \dfrac{5x}{3}$.

Vertikalv. vid P lika, så $\Delta PBE \sim \Delta PGA$ (VV), så

$$\frac{AP}{EP} = \frac{AG}{EB} = \frac{AD + DG}{EB} = \frac{BC + DG}{EB} = \frac{5x + \frac{5x}{3}}{4x} = \frac{5(1 + \frac{1}{3})}{4},$$

dvs: <u>Svar:</u> $\dfrac{5}{3}$.

4.



$AD \perp AP$, så $\tan \angle ADP = \dfrac{AP}{AD} =$

$= \dfrac{AP}{2R}$, där R = cirkelns radie.

$\angle AOC = 2 \cdot \angle ABC = 60°$ (periferiv.s.),

och $OA = OC$, så $\angle OAC = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$,

så $\angle CAP = 90° - 60° = 30°$. Detta ger att $\angle APC = 45° - 30° =$

$= 15°$ (ytterv.s.). Sinussatsen ger att $\dfrac{AP}{\sin \angle ACP} = \dfrac{AC}{\sin \angle APC}$,

och att $\dfrac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R$, så $\dfrac{AP}{\sin 135°} = \dfrac{2R \sin 30°}{\sin 15°}$,

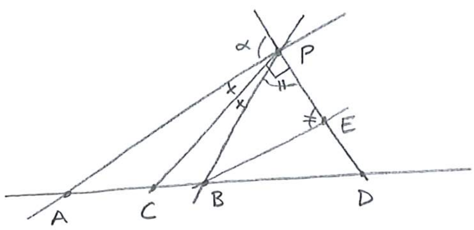
$$\frac{AP}{2R} = \frac{\sin 135° \cdot \sin 30°}{\sin 15°} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}-1}, \text{ ty } \sin 15° =$$

$$= \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \sin 30° \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

<u>Svar:</u> $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$.

5. Se kompendiet.

6.



Låt P vara s.a. $PA = 2 \cdot PB$ och dra linjerna AB, AP och BP. Dra bisektrisen till $\angle APB$, och linjen genom P som är $\perp$ mot bisektrisen. Kalla skärningspunkerna med AB för C och D.

Bis.s. ger att $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{PA}{PB} = 2$. Dra nu BE parallell med AP.

Vi har $\angle BEP = \alpha$ (alt.v.s), och även $\angle BPE = \alpha$, så $BP = BE$ (basv.s.).

Detta ger att $\underbrace{\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AP}{BE}}_{\Delta BDE \sim \Delta ADP \text{ (topp-}\Delta\text{. s.)}} = \dfrac{AP}{BP} = 2$.

Varken C eller D beror alltså på P (om $PA = 2 \cdot PB$), och eftersom $\angle CPD = 90°$ ligger P på cirkeln som har CD som diameter.