

Repetitionsuppgifter i Matematik inför Basår

Matematiska institutionen
Linköpings universitet

Innehåll

1	De fyra räknesätten	3
2	Potenser och rötter	7
3	Algebra	10
4	Funktioner	17
5	Logaritmer	19
6	Facit	20

Repetitionsuppgifter i matematik

Inför studierna i höst är det lämpligt att fräscha upp räknefärdigheterna. Det är kanske något år sedan du läste gymnasiematematiken, och när du kommer till Linköping sätter vi igång med full fart från första början!

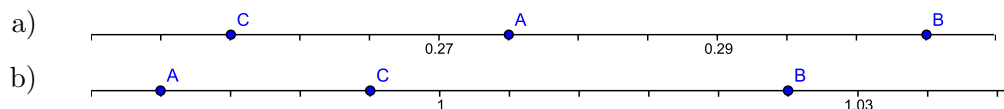
I skolan används numera räknare (bl.a. grafritare) flitigt. Detta har många fördelar. Rutinberäkningar går snabbt och man kan därigenom ägna mer tid åt verksamhet som utvecklar begreppsförståelse och problemlösningsförmåga.

Det finns dock risker med att använda räknare alltför flitigt. Många moment i matematiken är av den karaktären att man förstår dem bättre om man vänjer sig vid att hantera dem genom att räkna för hand, med penna och papper.

Alla uppgifter i detta häfte skall lösas helt utan tekniska hjälpmedel.

1 De fyra räknesätten

1.1. Bestäm de tal på tallinjen, som är markerade med A, B och C.



1.2. Vilket tal ligger mitt emellan

a) 0,21 och 0,22

b) 0,296 och 0,3

c) 0,79 och 0,8

d) 0,18 och 0,185

1.3. Beräkna

a) $5 \cdot 2 + 6 \cdot 3$

b) $5 \cdot (2 + 6 \cdot 3)$

c) $5 \cdot (2 + 6) \cdot 3$

d) $(5 \cdot 2 + 6) \cdot 3$

1.4. Beräkna

a) $-40 - 10$

b) $-20 + 12$

c) $15 + (-20)$

d) $-45 + (-5)$

e) $65 - (-20)$

f) $-30 - (-10)$

1.5. Beräkna

a) $-11 - 5 + 8 - 2$

b) $-8 + (-20) - (-12)$

c) $-40 + 15 - 10 + 5$

d) $15 - (-20) + (-100)$

Det är inte tillåtet att skriva två operationssymboler intill varandra. Ett vanligt fel är "gångar minus", dvs att man får se något sådant som $2 \cdot -3$. Detta är förbjudet; man måste sätta parentes om den andra faktorn: $2 \cdot (-3)$.

1.6. Beräkna

a) $(-1) \cdot (-3) \cdot (-4)$

b) $8 \cdot (-3) - (-5) \cdot (-6)$

c) $(-3) \cdot 7 + (-5) \cdot (-4)$

d) $(-2) \cdot (-10) - 6 \cdot (-3)$

e) $12 \cdot (4 \cdot 7 - 3 \cdot 9 - 1) + (12 \cdot 6 - 2 \cdot 7 \cdot 5) / 2$

När man arbetar med bråkuttryck är det mycket viktigt att bråkstrecket står på samma nivå som tecknet = och symboler som + och - (om dessa inte själva ingår i bråket). Exempelvis är det fel, ja direkt förbjudet, att skriva

$$a + \frac{1}{b} = c \text{ när man menar } a + \frac{1}{b} = c.$$

1.7. Beräkna

$$\text{a) } \frac{-5-7}{1-(-2)} \quad \text{b) } \frac{2+5 \cdot (-10)}{(-2) \cdot (-3)} \quad \text{c) } \frac{5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 + 3}$$

1.8. Beräkna

$$\text{a) } 12 - 10 \cdot 0,2 \quad \text{b) } 0,2 \cdot 4 + 6 \cdot 0,7 \quad \text{c) } 3,5 - 0,5 \cdot 3 \quad \text{d) } 20 - 12 \cdot (0,8 - 0,3)$$

1.9. Beräkna

$$\text{a) } 0,2 \cdot 0,3 \quad \text{b) } 0,08 \cdot 0,7 \quad \text{c) } \frac{0,72}{0,09} \quad \text{d) } \frac{0,15}{0,003}$$

1.10. Beräkna

$$\text{a) } 4 \cdot 0,2 + 0,1 \quad \text{b) } 0,7 \cdot 0,5 - 0,25 \quad \text{c) } 4,2 - 0,2 \cdot 5 \quad \text{d) } 0,8 + 0,2 \cdot 6$$

1.11. Beräkna

$$\text{a) } 0,3 + 0,2 \cdot 3 \quad \text{b) } \frac{6}{0,3} + \frac{6}{0,2} \quad \text{c) } \frac{0,4 + 0,5}{0,3} \quad \text{d) } 0,7 \cdot 0,3 - 0,2$$

1.12. Beräkna

$$\text{a) } 0,6 \cdot 0,5 - 0,4 \cdot 0,7 \quad \text{b) } \frac{0,36 + 0,3 \cdot 0,2}{0,06}$$

$$\text{c) } 0,7 \cdot 0,08 - 0,04 \cdot 0,6 \quad \text{d) } \frac{0,4 \cdot 0,9 - 0,3}{0,005}$$

1.13. Vilket tal skall talet 12,3 multipliceras med för att resultatet skall bli:

$$\text{a) } 1 \ 230 \ 000 \quad \text{b) } 0,0123$$

1.14. Beräkna

$$\text{a) } 0,38 + 0,2 \quad \text{b) } 0,31 - 0,1$$

$$\text{c) } 0,075 - 0,07 \quad \text{d) } 0,8 - 0,025$$

1.15. Summan av två tal är 0,6. Det ena talet är 0,04. Vilket är det andra?

1.16. Produkten av två tal är 0,045. Det ena talet är 0,9. Vilket är det andra?

1.17. Vad kostar det att köpa 0,3 kg köttfärs, om köttfärsen kostar 45 kr/kg?

1.18. För en viss kopieringsmaskin är kostnaden 30 öre per kopia. Hur många kopior har en kund tagit, om hon får betala 67,50 kr?

Räkning med tal i bråkform

Förkortning (med 7)

$$\frac{21}{49} = \frac{21/7}{49/7} = \frac{3}{7}$$

Förlängning (med 7)

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{35}{63}$$

Multiplikation

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{35}$$

Addition och subtraktion

$$\frac{2}{5} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 6} + \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{12}{30} + \frac{25}{30} - \frac{10}{30} = \frac{12 + 25 - 10}{30} = \frac{27}{30} = \frac{27/3}{30/3} = \frac{9}{10}$$

$$\text{Division } \frac{\frac{4}{7}}{\frac{5}{3}} = \frac{\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{3}}{\frac{5}{5} \cdot \frac{3}{3}} = \frac{\frac{12}{21}}{\frac{15}{15}} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

Om man förlänger dubbelbråket med $\frac{5}{3}$ (det inverterade talet till den ursprungliga nämnaren) får man talet 1 i nämnaren.

1.19. Förkorta så långt som möjligt

a) $\frac{30}{75}$

b) $\frac{63}{35}$

c) $\frac{77}{121}$

d) $\frac{175}{325}$

1.20. Bestäm det tal, som skall stå på den tomma platsen:

a) $\frac{1}{3} = \frac{\quad}{15}$

b) $\frac{3}{7} = \frac{\quad}{28}$

c) $\frac{5}{6} = \frac{35}{\quad}$

d) $\frac{3}{5} = \frac{75}{\quad}$

1.21. Skriv upp de tal mellan 0 och 1, som i enklaste bråkform skrivs med nämnaren 12.

1.22. Vilket tecken (=, < eller >) skall stå mellan talen?

a) $\frac{4}{8}$ $\frac{1}{2}$

b) $\frac{4}{7}$ $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$

d) $\frac{4}{9}$ $\frac{11}{24}$

1.23. Vilket tecken (< eller >) skall stå mellan talen?

a) $\frac{1}{99}$ $\frac{1}{100}$

b) $\frac{13}{25}$ $\frac{15}{31}$

c) $\frac{8}{9}$ $\frac{9}{10}$

d) $\frac{10}{9}$ $\frac{11}{10}$

1.24. Skriv följande tal i enklaste bråkform:

a) 0,005

b) 0,025

c) 0,0175

d) 0,00024

1.25. Beräkna

a) $\frac{11}{7} + \frac{3}{7} - 1$

b) $\frac{5}{6} - \frac{7}{9}$

c) $\frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{2}{45}$

d) $\frac{1}{8} + \frac{5}{6} - \frac{1}{12}$

e) $\frac{121}{-11} - \frac{-65}{5}$

f) $16 + (-5) + 2 \cdot (-10) + (-1) \cdot (-2) \cdot (-2) - \frac{3 \cdot (-4) \cdot (-2)}{-8}$

1.26. Summan av två tal är $\frac{3}{10}$. Det ena talet är $\frac{1}{6}$. Vilket är det andra?

1.27. Produkten av två tal är 1. Bestäm den andra faktorn, om den ena faktorn är

a) $\frac{1}{7}$ b) 6 c) $\frac{3}{5}$

1.28. Vilket tal skall $\frac{5}{6}$ multipliceras med för att produkten skall bli $\frac{3}{8}$?

1.29. Beräkna

a) $\frac{1}{25} + \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{6}$ b) $\left(3 - \frac{1}{7}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{25}\right)$

c) $\frac{5}{9} - \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4}$ d) $\frac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{12} + \frac{1}{3}}$

1.30. Bestäm det bråk som ligger mitt emellan

a) $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{8}$ och $\frac{1}{12}$

1.31. Beräkna medelvärdet av $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{2}$.

1.32. Beräkna

a) $\frac{3}{10} + \frac{2}{15} + \frac{11}{18}$ b) $\frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{5}{36} + \frac{5}{9}$

c) $1 - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right)$ d) $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$

1.33. Beräkna

a) $\frac{12}{35} \cdot \frac{21}{32}$ b) $\frac{14}{15} / \frac{21}{40}$ c) $\frac{\frac{11}{12}}{\frac{13}{14}}$

d) $\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{2}{5} - \frac{7}{7}}$ e) $\frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}{\frac{2}{6} - \frac{4}{8}}$ f) $\left(3 \cdot \frac{2}{9} - \frac{1}{4}\right) / \left(3 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)$

g) $\frac{5 + 18}{-4 + 8} - 1 - \frac{2 - (5 - 2)}{3 + (-1) \cdot (-1)}$

1.34. Av en tygrulle skall man klippa till 40 cm långa stycken till dukar. Hur många dukar får man om tygrullen är 240 m lång?

1.35. Vilket är kilopriset för jäst om 50 g kostar 2,75 kr?

1.36. I Sverige kastas i genomsnitt 300 kg sopor per person och år. Hur stor mängd sopor blir det under ett år i ett samhälle med 100 000 invånare? Svara i ton.

1.37. Vid en regnskur föll 12 mm regn. Hur många liter föll på en rektangulär gräsmatta, som är 25 m lång och 10 m bred?

2 Potenser och rötter

Uttrycket a^x kallas för en potens med *basen* a och *exponenten* x . Följande räknelagar för potenser förutsätts vara kända ($a, b > 0$):

$$\begin{array}{llll}
 a^x \cdot a^y = a^{x+y} & \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} & (a^x)^y = a^{x \cdot y} & (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \\
 \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} & a^{-x} = \frac{1}{a^x} & a^0 = 1 & a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}
 \end{array}$$

2.1. Beräkna

a) $\sqrt{1600} + \sqrt{900}$ b) $\sqrt{0,0081}$ c) $\sqrt[3]{0,125}$ d) $\sqrt[3]{27\,000}$

2.2. Beräkna

a) -3^2 b) $(-3)^2$ c) $\sqrt{3^2}$ d) $\sqrt{(-3)^2}$

2.3. Beräkna

a) $2^4 - 6$ b) $10 + 5^2$ c) $3^2 \cdot 2$ d) $3^2 - 2^3$

2.4. Beräkna

a) $5^3 - 5^2$ b) $3^4 - 4^3$ c) $2^6 + 6^2$ d) $3^2 \cdot 2^3$

2.5. Förenkla så långt som möjligt:

a) $\sqrt{4}$ b) $\sqrt[3]{27}$ c) $(\sqrt{8})^{2/3}$ d) $\frac{6^{13}}{3^{10} \cdot 2^3}$
 e) $1000^{1/3}$ f) $16^{3/4}$ g) $\sqrt[3]{2} \cdot 2^{-4/3}$ h) $\frac{6^{x+y}}{3^x \cdot 2^y}$
 i) $5^{-2/7} \cdot \sqrt[7]{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{6/7}$ j) $10^{7/2} \cdot (1/10)^4 \cdot 10^{-1/2}$

2.6. Beräkna

a) $5 \cdot 10^3 + 10^2$ b) $10^3 + 7 \cdot 10^2$ c) $3 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4$ d) $2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2$

2.7. Skriv i potensform med basen 2:

a) 8 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{64}$ d) 128

2.8. Beräkna

a) $0,3^2$ b) $0,1^5$ c) $\frac{1}{0,5^2}$ d) $\frac{1}{0,2^3}$
 e) $\frac{0,07}{-0,0035}$

2.9. Beräkna

a) $(-3)^3$ b) $(-7)^2$ c) $(-2)^6$ d) $(-10)^5$

2.10. Beräkna

a) $(-2)^3 + (-3)^2$ b) $(10)^2 + (-5)^3$ c) $(-2)^5 + (-5)^2$
 d) $(-4)^3 + (-3) \cdot (-20)$ e) $(-2)^3 + (-1)^4 - (-1)^2$

2.11. Ordna följande tal efter storlek, från det minsta till det största

$$817 \cdot 10^{-3}; (-0,5)^3; \left(\frac{9}{10}\right)^2; (-0,3)^2; (0,3)^4; -9 \cdot 10^{-2}$$

2.12. Beräkna

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 0,002 \cdot 10^6 + 10^3 & \text{b) } 1,45 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^2 \\ \text{c) } 0,5^2 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^4 & \text{d) } 0,03 \cdot 10^5 - 50^2 \end{array}$$

2.13. Beräkna

$$\begin{array}{llll} \text{a) } 10^4 - 10^2 & \text{b) } 10^4 + 10^2 + 10^6 & \text{c) } 10^5 + 10^3 & \text{d) } 10^7 - 10^3 \\ \text{e) } 10^{-2} - 10^{-1} & \text{f) } 10^{-1} - 10^{-2} & & \end{array}$$

2.14. Skriv i potensform med basen 2 det tal som är

$$\text{a) dubbelt så stort som } 2^{20} \quad \text{b) hälften så stort som } 2^{20}$$

2.15. Skriv som en enda potens av 5:

$$\text{a) } 5^7 \cdot 5^{-3} \quad \text{b) } \frac{5^{-6}}{5^2} \quad \text{c) } 5^{-2} \cdot 5^{-3} \quad \text{d) } (5^{-3})^2$$

2.16. Beräkna

$$\text{a) } 5^6 \cdot 5^{-4} \quad \text{b) } 3^4 \cdot 3^{-5} \quad \text{c) } 7^6 \cdot 7^{-7} \cdot 7 \quad \text{d) } (2^{-4})^2 \cdot 2^6$$

2.17. Skriv som en enda potens av 3:

$$\text{a) } 3^{-4} \cdot 3^{-5} \quad \text{b) } \frac{3^3}{3^9} \quad \text{c) } \frac{3^2}{3^{-4}} \quad \text{d) } (3^{-5})^{-3}$$

2.18. Beräkna

$$\text{a) } 7^{-9} \cdot 7^{-5} \cdot 7^{12} \quad \text{b) } (3^4)^3 \cdot (3^2)^{-5} \quad \text{c) } (10^{-4})^{-2} \cdot 10^{-7} \quad \text{d) } 6^8 \cdot (6^3)^{-3}$$

2.19. Skriv som en enda potens av 3:

$$\text{a) } \frac{3^{-5} \cdot 3^2}{3^7} \quad \text{b) } \frac{3^{-11} \cdot 3^4}{(3^5)^2} \quad \text{c) } (3^{-4})^2 \cdot 3^{-3} \quad \text{d) } \frac{3^{-9}}{3^{-3}}$$

2.20. Förkorta

$$\text{a) } \frac{2^3 \cdot 3^5}{3^3 \cdot 2^4} \quad \text{b) } \frac{6^3}{3^2 \cdot 2^4} \quad \text{c) } \frac{18^3 \cdot 16}{9 \cdot 12^4}$$

2.21. Skriv som en potens med basen 2

$$\text{a) } \frac{8^3 \cdot 4^2}{16^2} \quad \text{b) } 16^{-2} \cdot 256^2 \cdot 2^{17}$$

2.22. Beräkna

$$\text{a) } 1 - 7^{-1} \quad \text{b) } 2^{-2} - 6^{-1} \quad \text{c) } 4^{-1} + 5^{-1} \quad \text{d) } 2^{-3} + 3^{-2}$$

2.23. Beräkna

$$\text{a) } 0,2^{-3} \quad \text{b) } 0,3^{-2} \quad \text{c) } 0,3^{-1} + 0,6^{-1} \quad \text{d) } 0,2^{-2} + 0,5^{-2}$$

2.24. Beräkna och svara i grundpotensform (dvs. på formen $a \cdot 10^n$, där $1 \leq a < 10$):

$$\text{a) } 3 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^5 \quad \text{b) } 4 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^5 \quad \text{c) } 4 \cdot 10^{-4} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \quad \text{d) } 5 \cdot 10^{-5} \cdot 8 \cdot 10^{-8}$$

2.25. Med hur många siffror skrivs följande tal om de skrivs utan potenser?

- a) $1,75 \cdot 10^8$ b) $8,5 \cdot 10^{20}$ c) $350 \cdot 10^{12}$ d) $0,03 \cdot 10^8$

2.26. Beräkna och svara i grundpotensform:

- a) $\frac{6 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{-2}}$ b) $\frac{3 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-7}}$ c) $\frac{3 \cdot 10^{-5}}{1,5 \cdot 10^3}$ d) $\frac{2 \cdot 10^4}{8 \cdot 10^{-5}}$

2.27. Beräkna och svara i grundpotensform:

- a) $(4 \cdot 10^4)^2$ b) $(5 \cdot 10^{-5})^3$ c) $(2 \cdot 10^{-3})^3$ d) $(2 \cdot 10^5)^{-1}$

2.28. $a = 8 \cdot 10^8$ och $b = 2 \cdot 10^{-2}$. Beräkna och svara i grundpotensform:

- a) ab b) a/b c) b/a

Ett rotuttryck kan ibland förenklas genom att man faktorerar under rotmärket efter följande modell: $\sqrt{72} = \sqrt{8 \cdot 9} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt{(2^2 \cdot 3^2) \cdot 2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

2.29. Följande tio tal är parvis lika. Para ihop de tal som är lika

$$\sqrt{8}, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, \sqrt{12}, 3\sqrt{5}, \sqrt{18}, \sqrt{75}, \sqrt{45}, 5\sqrt{3}, 2\sqrt{2}$$

2.30. Snygga till följande uttryck enligt ovanstående idé:

- a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{20}$ c) $\sqrt{48}$ d) $\sqrt{2} + \sqrt{8}$
 e) $\sqrt{125} - \sqrt{5}$ f) $\sqrt{243} + \sqrt{3} - \sqrt{27}$

2.31. Beräkna och förenkla följande uttryck:

- a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ b) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ c) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$ d) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{7}$
 e) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$ f) $\frac{\sqrt{250}}{\sqrt{5}}$

Ett bråk med kvadratrotsuttryck i nämnaren brukar inte anses som "förenklat". Kvadratrötter i nämnare kan avlägsnas genom att man förlänger med det s.k. *konjugatuttrycket*:

$$\frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{1 \cdot (\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5} - 2) \cdot (\sqrt{5} + 2)} = \frac{\sqrt{5} + 2}{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{1} = \sqrt{5} + 2$$

2.32. Skriv om följande uttryck utan kvadratrötter i nämnaren:

- a) $\frac{1}{\sqrt{3} - 1}$ b) $\frac{5}{\sqrt{6} + 1}$ c) $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$ d) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

2.33. Förenkla så långt som möjligt följande tal:

- a) $\frac{1}{1 - (\sqrt{3} - 1)^2}$ b) $\frac{6}{3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{6}}}$

3 Algebra

Förenklningar och omskrivningar

Produkten av två polynom innebär multiplikation av två parentesuttryck, som visas i exemplet nedan.

Teckenregeln ”lika tecken ger plus; olika tecken ger minus” tillämpas.

Exempel: $(x - 4) \cdot (2x - 5) = 2x^2 - 5x - 8x + 20 = 2x^2 - 13x + 20$

Vi fortsätter med några räknelagar:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2)$$

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2 \quad (3)$$

De två första, ekvationerna (1) och (2), kallas *kvadreringsreglerna* och den tredje, (3), kallas *konjugatregeln*. Samtliga dessa räknelagar kan kontrolleras genom att man utför multiplikationen i vänsterledet. Den första kvadreringsregeln kan vi även se på följande geometriska sätt, i alla fall då a och b är positiva.

	a	b
a	a^2	ab
b	ab	b^2

Vänsterledet i den översta ekvationen är arean av hela kvadraten med sidan $a + b$, högerledet är summan av arean av de fyra delar som kvadraten består av.

Konjugatregeln och andra kvadreringsregeln kan på motsvarande sätt ges en geometrisk tolkning. Konjugatregeln är för övrigt ofta användbar, då det gäller att förenkla uttryck som innehåller rotuttryck i nämnaren, vilket illustrerades på sida 9.

Faktorisering genom utbrytning

$$5xy - 25x^2y = 5 \cdot x \cdot y - 5 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y = 5xy \cdot (1 - 5x) = 5xy(1 - 5x)$$

$$5(x + y) + 3xz + 3yz = 5(x + y) + 3z(x + y) = (x + y)(5 + 3z)$$

Faktorisering genom användning av konjugat- och kvadreringsreglerna

$$4s^2 - 9t^2 = (2s + 3t)(2s - 3t)$$

$$18a^2 + 12a + 2 = 2(9a^2 + 6a + 1) = 2(3a + 1)^2$$

$$(x + 1)^2 - 4y^2 = (x + 1 + 2y)(x + 1 - 2y)$$

Ekvationslösning är vad det låter som. Det handlar om att finna samtliga tal som uppfyller en given ekvation.

Exempel 1 Lös ekvationen $2x - 3 = 4 \cdot (5 - 3x)$

Ekvationen kan skrivas $2x - 3 = 20 - 12x$. Vi möblerar om, så att alla x hamnar på ena sidan och alla konstanter på den andra sidan om likhetstecknet, och får ekvationen $14x = 23$ d.v.s. $x = \frac{23}{14}$.

Exempel 2 Lös ekvationen $\frac{1}{x} + \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$

Samla konstanterna på högra sidan och gör liknämning, så fås

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{3}{15} - \frac{5}{15} = -\frac{2}{15}$$

Detta ger lösningen $x = -\frac{15}{2}$.

Exempel 3 Lös ekvationen $(x - 1) \cdot (x - 4) = (x - 4) \cdot (3 - x)$

Vi observerar att faktorn $(x - 4)$ finns med i båda leden. Om $x = 4$ så blir alltså såväl höger- som vänsterled 0, d.v.s. $x = 4$ är en lösning. Om $x \neq 4$ kan vi dividera båda leden med $(x - 4)$ och då erhålla ekvationen $x - 1 = 3 - x$, vilken har lösningen $x = 2$. Svaret blir att $x = 2$ eller att $x = 4$.

(Ett mycket vanligt fel är att man direkt dividerar båda leden med den gemensamma faktorn och erhåller ekvationen $x - 1 = 3 - x$. Då har man dock dessvärre tappat bort en lösning. Division med $(x - 4)$ förutsätter ju att $x \neq 4$.)

3.1. Förenkla

a) $(3x - 5y) \cdot (4x + 2y) - (6x - 10y) \cdot (2x + y)$ b) $6 \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right) + 18 \cdot \left(\frac{y}{6} - \frac{x}{9}\right)$

3.2. Lös ekvationerna

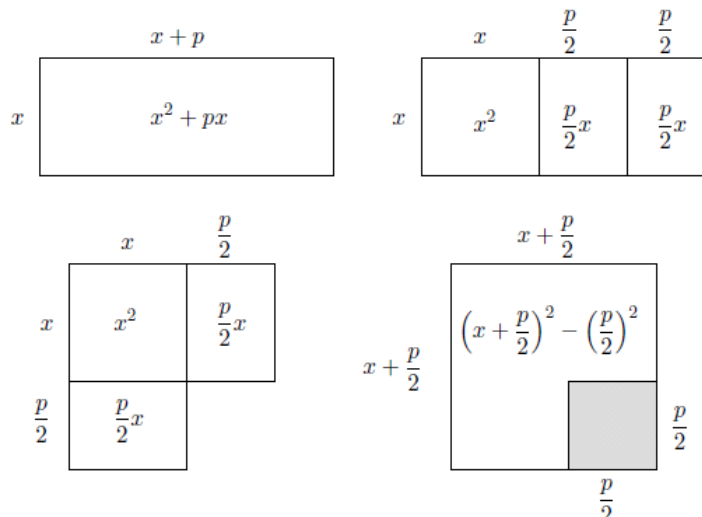
a) $3x - 11 = 5x - 3$ b) $7z + 22 = 22 - 3z$ c) $5 \cdot (x + 3) = 6 \cdot (x + 2)$

d) $\frac{2x}{3} + 4 = 10$ e) $8100 = \frac{5x}{12} + 6600$ f) $\frac{10^7}{x} = 4 \cdot 10^5$

3.3. Lös ekvationen $(5x + 8) \cdot (6 - x) - (4 - x) \cdot (5x + 2) = 44$

Andragradsekvationer

Betrakta en allmän andragradsekvation $x^2 + px + q = 0$ där p och q är konstanter. För att härleda en formel för ekvationens rötter, använder man sig av en omskrivning, som är mycket vanlig, då man arbetar med andragradsuttryck, nämligen *kvadratkomplettering*. Detta innebär att man samlar alla uttryck som innehåller x i en kvadrat, vilket kan ses geometriskt i nedanstående figur.



Vi kan även se det algebraiskt genom att använda oss av första kvadreringsregeln:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right)$$

Med denna omskrivning kan ekvationen $x^2 + px + q = 0$ tecknas $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ under förutsättning att $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$.

Då har ekvationen lösningarna $x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, d.v.s. $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

3.4. Tre på varandra följande positiva heltal (konsekutiva tal) har summan 294. Vilka är talen?

3.5. Lös ekvationerna

a) $\frac{x+5}{15} + \frac{x}{9} = 3$

b) $\frac{2x-3}{4} + \frac{5-x}{3} = 1$

c) $\frac{x-3}{8} = \frac{x-5}{12} + \frac{x-1}{18}$

d) $\frac{x+3}{x-1} + \frac{x-4}{x-6} = 2$

När man skall lösa ekvationen $16 \cdot (13 - x) = 48$ nedan, är det enklast att först lösa ut $(13 - x)$ och inte att multiplicera in i parentesen.

3.6. Lös ekvationerna

a) $16 \cdot (13 - x) = 48$ b) $\frac{13 \cdot 12}{45} \cdot (x-7) = \frac{52 \cdot 72}{45}$ c) $\frac{5x}{x-4} - \frac{4}{x} = 5$

3.7. Faktorisera följande uttryck så långt som möjligt:

a) $x^2 - 49$

b) $3x^2 - 12$

c) $18x - 2x^3$

d) $x^2 - 10x + 25$

Vi påminner om begreppet absolutbeloppet av ett reellt tal x , som skrivs $|x|$.

$$|x| = x \text{ om } x \geq 0$$

$$|x| = -x \text{ om } x < 0$$

Det viktiga just nu är att $|x|$ alltid är större än eller lika med 0.

Observera att en *kvadratrots* också alltid är större än eller lika med noll. Detta måste man tänka på exempelvis när man bryter ut ur rotuttryck. Om man skall beräkna $\sqrt{(-2)^2}$ skall man först räkna ut $(-2)^2 = 4$; sedan får man $\sqrt{4} = 2$. Alltså är $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$. Med hjälp av absolutbelopp kan man skriva en formel som alltid gäller, nämligen $\sqrt{(a)^2} = |a|$.

3.8. Förenkla följande uttryck:

a) $\sqrt{3^2}$

b) $\sqrt{(-3)^2}$

c) $\sqrt{x^2}$

d) $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$

e) $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}$

3.9. Skriv om följande uttryck så att så litet som möjligt blir kvar under kvadratrotsstecknet:

a) $\sqrt{a^7}$

b) $\sqrt{a^5 \cdot b^{16}}$

3.10. Förenkla följande uttryck

a) $3x - 5y - (5y + 3x)$

b) $\frac{z}{4} + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3} - \frac{z}{3}\right)$

3.11. Utför multiplikationerna

a) $(4y - 1) \cdot (2y - 1)$

b) $(2x - 5) \cdot (4x^2 - 3x - 6)$

3.12. Förenkla följande uttryck och beräkna därefter uttryckets värde för det angivna x -värdet.

a) $6 \cdot \left(\frac{x}{12} - \frac{1}{18}\right) - 4 \cdot \left(\frac{x}{12} - \frac{1}{16}\right)$ och $x = \frac{1}{2}$

b) $(x + 1) \cdot (x^2 - 4x + 1) - (x^3 - 3x + 2)$ och $x = -2$

3.13. Utveckla och förenkla

a) $(3x + 7) \cdot (3x - 7)$

b) $(2x + 5y)^2$

c) $(\sqrt{12} - \sqrt{3})^2$

d) $(3x + 2)^2 + (3x - 2)^2$

e) $(4a + 5b)^2 - (4a - 5b)^2$

3.14. Uttrycket döljer ett heltal. Vilket? $(\sqrt{3} + \sqrt{12})^2 - (4\sqrt{2} - \sqrt{5}) \cdot (4\sqrt{2} + \sqrt{5})$

3.15. Förenkla genom att förkorta

a) $\frac{20a^6}{5a^5}$

b) $\frac{x^2 + 6x}{2x + 12}$

c) $\frac{8a^2 - 32}{4a + 8}$

3.16. Förenkla

a) $\frac{a^2 - b^2}{a} \cdot \frac{ab}{a - b}$

b) $\frac{4x - 2x^2}{2x - 4}$

c) $x - \frac{x^2 - 1}{x}$

3.17. Förenkla följande uttryck så långt som möjligt:

a) $\frac{5x + 15}{3x^2 + 9x}$

b) $\frac{x^2 - 9}{3x - 9}$

c) $\frac{x^3 - 4x}{5x + 10}$

d) $\frac{8x^2 - 72}{2x - 6}$

3.18. Förenkla följande uttryck så långt som möjligt:

$$\text{a) } \frac{1}{ab} / \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad \text{b) } \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \cdot \left(\frac{2a+b}{a+b} - 1 \right)$$

3.19. Förenkla följande uttryck så långt som möjligt:

$$\text{a) } \frac{b}{a^2+ab} + \frac{1}{a+b} \quad \text{b) } \frac{x}{x-2} + \frac{x}{x+3} - 2 \quad \text{c) } \frac{2a+b}{a^2-ab} - \frac{2}{a-b} \quad \text{d) } \frac{b^2-2ab}{a^2-ab} + \frac{a}{a-b}$$

3.20. Lös ekvationerna

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 9x^2 = 25 & \text{b) } 2 \cdot (x-11)^2 = 32 & \text{c) } 15x^2 = 16x \\ \text{d) } (x-1)^2 + 2 \cdot (x+1) \cdot (x-1) = 3 \cdot (x+1) \cdot (x+3) - 3 \cdot (5x+1) \end{array}$$

3.21. Lös följande ekvationer:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x^2 + 14x + 45 = 0 & \text{b) } x^2 - 11x - 26 = 0 & \text{c) } 2x^2 - x - 28 = 0 \\ \text{d) } 9x^2 + 9x - 10 = 0 & \text{e) } 3x^2 - 10x + 8 = 0 \end{array}$$

3.22. Faktorisera följande uttryck så långt som möjligt:

$$\text{a) } x^2 - 2x - 3 \quad \text{b) } 5x^2 + 25x + 20 \quad \text{c) } 2x^2 + 13x - 7 \quad \text{d) } 24 - 3x^2 - 21x$$

Kom ihåg följande regel: Om en produkt av två eller flera faktorer är noll, så måste minst en av faktorerna vara noll.

3.23. Lös följande ekvationer:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x \cdot (x+3) = 0 & \text{b) } (x-3) \cdot (x+5) = 0 \\ \text{c) } 3x \cdot (2x-5) = 0 & \text{d) } (3x-2) \cdot (x+8) \cdot 5 = 0 \end{array}$$

3.24. Ekvationen $x^2 - 4x + a = 0$ har en rot $x = -3$. Bestäm a och den andra roten.

3.25. Lös följande ekvationer:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 3x - (x+2) \cdot (x-2) = 0 & \text{b) } (x+3) \cdot (x+4) = 42 \\ \text{c) } \frac{x-1}{x+5} = \frac{3}{x-1} & \text{d) } \frac{x}{7-x} = \frac{3}{3x-1} \end{array}$$

Hur förenklar man bäst ett "dubbelbråk", d.v.s. ett bråk som i sin tur innehåller bråk i täljaren och/eller nämnaren? En bra idé är ofta att börja med att förlänga bråket med minsta gemensamma nämnaren (MGN) till "småbråken".

Ett exempel:
$$x = \frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2}$$

Här är MGN lika med ab . Förläng bråket med detta, d.v.s. multiplicera både täljare och nämnare med ab :

$$x = \frac{ab \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right)}{ab \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \right)} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{(b-a) \cdot (b+a)}{(a+b)^2} = \frac{b-a}{b+a}.$$

3.26. Förenkla följande uttryck så långt som möjligt:

$$\text{a) } \frac{a - \frac{9}{3}}{1 + \frac{1}{a}}$$

$$\text{b) } \frac{\frac{a}{3} - \frac{12}{a}}{\frac{1}{3} + \frac{2}{a}}$$

$$\text{c) } \frac{\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}}$$

Linjära ekvationssystem

$$\begin{cases} 7x - 3y = 70 \\ 2x - 8y = -30 \end{cases}$$

Var och en av dessa ekvationer har obegränsat många lösningar. Att lösa ekvationssystemet innebär att vi bestämmer ekvationernas gemensamma lösningar. Det första steget i lösningen är att *eliminera* (bortskaffa) en av de obekanta. Detta kan ske på olika sätt:

Metod 1 (Substitutionsmetoden)

Den andra ekvationen ger $2x = 8y - 30$, som efter division med 2 ger $x = 4y - 15$.

x i den första ekvationen ersättes nu med $4y - 15$, d.v.s. substitueras (insättes) i den första ekvationen. Vi har då eliminerat x .

$$7(4y - 15) - 3y = 70 \text{ ger } 28y - 105 - 3y = 70 \Leftrightarrow 25y = 70 + 105 \Leftrightarrow 25y = 175 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{175}{25} = 7$$

$$\text{Om } y = 7 \text{ blir } x = 4 \cdot 7 - 15 = 13 \quad \underline{\text{Svar:}} \begin{cases} x = 13 \\ y = 7 \end{cases} .$$

Metod 2 (Additionsmetoden)

För att kunna eliminera y multipliceras den första ekvationen med 8 och den andra med -3 , vilket ger nedanstående ekvationssystem

$$\begin{cases} 8 \cdot (7x - 3y) = 8 \cdot 70 \\ -3 \cdot (2x - 8y) = -3 \cdot (-30) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 56x - 24y = 560 \\ -6x + 24y = 90 \end{cases}$$

$$\text{Addition av ekvationerna ger:} \quad \begin{aligned} 56x + (-6x) - 24y + 24y &= 560 + 90 \Leftrightarrow \\ 50x &= 650 \end{aligned}$$

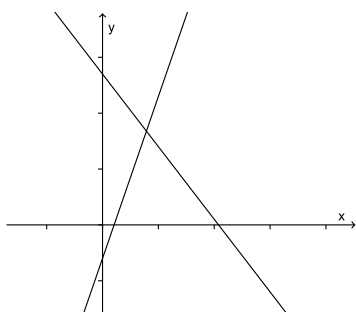
$x = 650/50 = 13$, vilket i sin tur ger y -värdet efter insättning av $x = 13$ i exempelvis den första ekvationen.

$$7x - 3y = 70 \Leftrightarrow 7x - 70 = 3y \Leftrightarrow 7 \cdot 13 - 70 = 3y \Leftrightarrow 91 - 70 = 3y \Leftrightarrow 21 = 3y \Leftrightarrow 7 = y$$

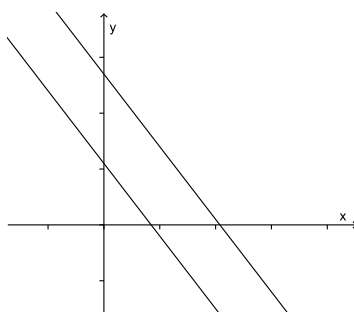
$$\underline{\text{Svar:}} \begin{cases} x = 13 \\ y = 7 \end{cases} .$$

Grafisk tolkning av ekvationssystem

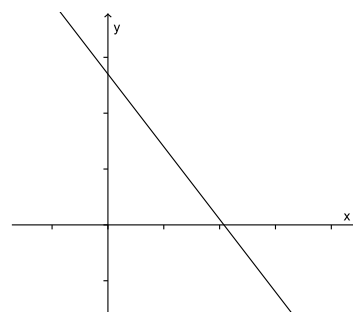
Varje ekvation i ett linjärt ekvationssystem med två obekanta betyder grafiskt en rät linje. Följande huvudfall förekommer:



En lösning
Linjerna skär varandra
i en punkt



Ingen lösning
Linjerna är parallella



Obegränsat många lösningar
Linjerna sammanfaller

3.27. Lös ekvationssystemen

a)
$$\begin{cases} 2x - 5y = 2 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 7x - y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 4x - 7y + 5 = 0 \\ 14x + 8y - 15 = 0 \end{cases}$$

3.28. Lös ekvationssystemen

a)
$$\begin{cases} 2x = 5y \\ 5x = 4y + 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - 32y = 4 \\ 0,2x + y = 4,5 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 10 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 11 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 0,2x + 1,2y = 1 \\ 0,3x - y = 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{2y}{3} = \frac{5}{2} \\ x - \frac{y}{2} = 3 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 0,2x - 0,3y = -0,9 \\ 1,2x + 1,5y = -2,1 \end{cases}$$

3.29. Lös ekvationssystemen

a)
$$\begin{cases} x + 6y = 24 \\ 2x + 4y = 24 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -3x + 9y = -6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ -3x + 6y = 0 \end{cases}$$

3.30. Ett jetplan startar kl. 11.45 från Arlanda mot Sturup och håller farten 800 km/h. Kl. 12.00 startar ett propellerplan från Sturup mot Arlanda och flyger med farten 260 km/h. Flygvägen mellan Arlanda och Sturup är 550 km. Bestäm när och hur långt från Sturup som flygplanen möts.

4 Funktioner

4.1. Förenkla

a) $p(x) = x \cdot (x + 1) + (1 - x^2)$

b) $p(x) = 3x \cdot (7 - 5x) - 2x(3x + 5)$

4.2. $p(x) = 3x^2 - 6x + 2$. Beräkna

a) $p(3)$

b) $p(1)$

c) $p(-2)$

4.3. Funktionen f är definierad av formeln $f(x) = \frac{2}{3x+1}$. Beräkna

a) $f(5)$

b) $f(-3)$

c) $f\left(\frac{1}{9}\right)$

d) För vilket eller vilka x gäller att $f(x) = 4$?

e) För vilket eller vilka x saknar funktionen värde?

4.4. Beräkna $f(2) - f\left(\frac{1}{2}\right)$, då $f(x) = \frac{10}{2x+1}$.

4.5. Låt $f(x) = -x^3 - 2x^2$. Beräkna

a) $f(3)$

b) $f(-5)$

c) För vilket eller vilka x gäller att $f(x) = 0$?

d) Förenkla uttrycket $f(2x) - f(x)$.

4.6. Låt $f(x) = 3x^2 - 4x$. Beräkna

a) $f(-2)$

b) $f\left(\frac{5}{6}\right)$

c) $f(f(2))$

d) För vilket eller vilka x gäller att $f(x) = 55$?

e) Förenkla $\frac{f(a) - f(b)}{a - b}$. (I vilket sammanhang förekommer detta?)

f) Förenkla $\frac{f(3a) - f(a)}{8a}$.

4.7. Funktionen h är definierad genom $h(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$. Beräkna

a) $h(2) - h(1)$

b) $h(3) - h(-2)$

c) $h(1) - h\left(\frac{1}{2}\right)$

4.8. Funktionen g är definierad genom $g(x) = \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{5}{2}x^2 + x$. Beräkna

a) $g(3) - g(1)$

b) $g(0) - g(-2)$

4.9. $f(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x^2}$. Beräkna

a) $f(3) - f(2)$

b) $f(-2) - f(-5)$

4.10. Förenkla uttrycket $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, då

a) $f(x) = \frac{1}{3x+1}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

c) Vilket matematiskt begrepp hör detta ihop med?

- 4.11. En kula rör sig så att sambandet mellan tiden t (sekunder) och tillryggalagd sträcka $s(t)$ (meter) beskrivs av $s(t) = 25t + 0,5t^2$.
- Hur långt flyttar sig kulan under tidsintervallet från $t = 2$ till $t = 10$?
 - Vilken medelhastighet har kulan under tidsintervallet från $t = 4$ till $t = 6$?
 - Teckna ett uttryck för medelhastigheten under tidsintervallet från $t = t_1$ till $t = t_2$.
- 4.12. Vid produktion av en vara är kostnaden att tillverka q enheter $T(q)$ tusen kronor, där $T(q) = 5000 + 200q + q^2$.
- Hur stor är kostnadsökningen, när man ökar produktionen från 50 till 60 enheter?
 - Hur stor är den genomsnittliga kostnadsökningen per enhet, när man ökar produktionen från 50 till 60 enheter?
 - Teckna ett uttryck för den genomsnittliga kostnadsökningen per enhet, när man ökar produktionen från q_1 till q_2 .

5 Logaritmer

I det här avsnittet handlar det om 10-logaritmer. Kom ihåg hur dessa definieras. Hela hemligheten finns i formeln:

$$x = 10^{\lg x}$$

Man kan också uttrycka det så här: $\lg x = y$ är detsamma som $10^y = x$

Logaritmlagarna

$$\lg xy = \lg x + \lg y$$

$$\lg \left(\frac{x}{y} \right) = \lg x - \lg y$$

$$\lg x^t = t \lg x$$

Exempel

$$\lg 13x = \lg 13 + \lg x$$

$$\lg \left(\frac{7}{x} \right) = \lg 7 - \lg x$$

$$\lg 2^x = x \lg 2$$

Varning!!! $\lg(x + y)$ kan **ej** förenklas!!!

5.1. Bestäm följande logaritmvärden:

- a) $\lg 100$ b) $\lg 10\,000$ c) $\lg 0,01$
 d) $\lg 0,00001$ e) $\lg \sqrt{10}$

5.2. Bestäm talet a om

- a) $\lg a = 3$ b) $\lg a = -4$ c) $\lg a = -1$ d) $\lg a = 0$

5.3. Sätt $\lg 2 = a$ och $\lg 3 = b$. Uttryck i a och b :

- a) $\lg 4$ b) $\lg 6$ c) $\lg 8$

5.4. I vilket intervall ligger talet t om

- a) $2 < \lg t < 3$ b) $0 < \lg t < 1$ c) $-1 < \lg t < 0$ d) $8 < \lg t < 10$

5.5. Beräkna med användning av logaritmlagarna

- a) $\lg 2 + \lg 5$ b) $\lg 10 - \lg 2$ c) $\lg 4 + 2 \lg 5$ d) $\lg 0,02 + \lg 0,5$

5.6. Lös följande ekvationer

- a) $\lg x = \lg 3 + \lg 5$ b) $\lg 2x = \lg 24 - \lg 3$ c) $\lg x = 3 \lg 2 + \lg 3$ d) $\lg 12x - \lg(x+1) = 1$

5.7. Antag att $\lg t = a$. Skriv, uttryckt i a , talen

- a) $\lg t^3$ b) $\lg \frac{1}{t}$ c) $\lg 100t$ d) $\lg 0,1t$

5.8. Beräkna

- a) $10^{2 \lg 3}$ b) $10^{-\lg 5}$ c) $10^{\lg 3 + \lg 5}$ d) $10^{\lg 3 - \lg 18}$

5.9. Skriv $a \lg x + b \lg y + c$ som en logaritm.

5.10. Förenkla $\frac{\lg 30\,000 - \lg \sqrt{20} + \lg(10\sqrt{2000}) - \lg 3}{\lg 1000 + \lg \sqrt{10} + \lg 10}$

- 1.30. a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{5}{48}$
- 1.31. $\frac{13}{36}$
- 1.32. a) $\frac{47}{45}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{5}{8}$ d) $\frac{3}{10}$
- 1.33. a) $\frac{9}{40}$ b) $\frac{16}{9}$ c) $\frac{77}{78}$ d) -30
 e) 6 f) $\frac{5}{9}$ g) 5
- 1.34. 600 dukar
- 1.35. 55 kronor per kilo
- 1.36. 30 000 ton sopor
- 1.37. 3000 liter regn föll på gräsmattan.

2. Facit: Potenser och rötter

- 2.1. a) 70 b) 0,09 c) 0,5 d) 30
- 2.2. a) -9 b) 9 c) 3 d) 3
- 2.3. a) 10 b) 35 c) 18 d) 1
- 2.4. a) 100 b) 17 c) 100 d) 72
- 2.5. a) 2 b) 3 c) 2 d) 27 648
 e) 10 f) 8 g) 0,5 h) $2^x \cdot 3^y$
 i) 0,2 j) 0,1
- 2.6. a) 5100 b) 1700 c) 360 000 d) 20 300
- 2.7. a) 2^3 b) 2^{-2} c) 2^{-6} d) 2^7
- 2.8. a) 0,09 b) 0,00001 c) 4 d) 125
 e) -20
- 2.9. a) -27 b) 49 c) 64 d) $-100\,000$
- 2.10. a) 1 b) -25 c) -7 d) -4
 e) -8
- 2.11. $-0,125 \left((-0,5)^3 \right), -0,09 \left(-9 \cdot 10^{-2} \right), 0,0081 \left((0,3)^4 \right), 0,09 \left((-0,3)^2 \right), 0,81 \left((9/10)^2 \right), 0,817 \left(817 \cdot 10^{-3} \right)$
- 2.12. a) 3000 b) 14 000 c) 5000 d) 500
- 2.13. a) 9900 b) 1 010 100 c) 101 000 d) 9 999 000
 e) $-0,09$ f) 0,09
- 2.14. a) 2^{21} b) 2^{19}
- 2.15. a) 5^4 b) 5^{-8} c) 5^{-5} d) 5^{-6}
- 2.16. a) $5^2 = 25$ b) $3^{-1} = \frac{1}{3}$ c) $7^0 = 1$ d) $2^{-2} = \frac{1}{4}$
- 2.17. a) 3^{-9} b) 3^{-6} c) 3^6 d) 3^{15}

- 2.18. a) $7^{-2} = \frac{1}{49}$ b) $3^2 = 9$ c) $10^1 = 10$ d) $6^{-1} = \frac{1}{6}$
- 2.19. a) 3^{-10} b) 3^{-17} c) 3^{-11} d) 3^{-6}
- 2.20. a) $\frac{9}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{2}$
- 2.21. a) 2^5 b) 2^{25}
- 2.22. a) $\frac{6}{7}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{9}{20}$ d) $\frac{17}{72}$
- 2.23. a) 125 b) $\frac{100}{9}$ c) 5 d) 29
- 2.24. a) $1,5 \cdot 10^9$ b) $2 \cdot 10^{10}$ c) $2,4 \cdot 10^{-9}$ d) $4 \cdot 10^{-12}$
- 2.25. a) 9 siffror b) 21 siffror c) 15 siffror d) 7 siffror
- 2.26. a) $3 \cdot 10^8$ b) $5 \cdot 10^3$ c) $2 \cdot 10^{-8}$ d) $2,5 \cdot 10^8$
- 2.27. a) $1,6 \cdot 10^9$ b) $1,25 \cdot 10^{-13}$ c) $8 \cdot 10^{-9}$ d) $5 \cdot 10^{-6}$
- 2.28. a) $1,6 \cdot 10^7$ b) $4 \cdot 10^{10}$ c) $2,5 \cdot 10^{-11}$
- 2.29. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$
- 2.30. a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{5}$ c) $4\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{2}$
e) $4\sqrt{5}$ f) $7\sqrt{3}$
- 2.31. a) 4 b) 6 c) 10 d) $\sqrt{77}$
e) 5 f) $5\sqrt{2}$
- 2.32. a) $\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)$ b) $\sqrt{6} - 1$ c) $3 + 2\sqrt{2}$ d) $5 + 2\sqrt{6}$
- 2.33. a) $\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1$ b) $4\sqrt{6} + 6\sqrt{3}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$ d) $\frac{1}{5} \cdot (2\sqrt{2} - \sqrt{3})$

3. Facit: Algebra

- 3.1. a) 0 b) 0
- 3.2. a) $x = -4$ b) $z = 0$ c) $x = 3$ d) $x = 9$
e) $x = 3600$ f) $x = 25$
- 3.3. $x = 1$
- 3.4. Talen är 97, 98 och 99
- 3.5. a) $x = 15$ b) $x = \frac{1}{2}$ c) $x = 7$ d) $x = \frac{13}{3}$
- 3.6. a) $x = 10$ b) $x = 31$ c) $x = -1$
- 3.7. a) $(x - 7) \cdot (x + 7)$ b) $3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$ c) $2x \cdot (3 - x) \cdot (3 + x)$ d) $(x - 5)^2$
- 3.8. a) 3 b) 3 c) $|x|$ d) $|x + 1|$
e) $x^2 + 1$
- 3.9. a) $|a|^3 \sqrt{a}$ b) $a^2 \cdot b^8 \cdot \sqrt{a}$
- 3.10. a) $-10y$ b) $\frac{7}{12}z - \frac{1}{6} = \frac{7z - 2}{12}$
- 3.11. a) $8y^2 - 6y + 1$ b) $8x^3 - 26x^2 + 3x + 30$
- 3.12. a) Det förenklade uttrycket är $\frac{2x - 1}{12}$ och antar värdet 0 då $x = \frac{1}{2}$.

- b) Det förenklade uttrycket är $-3x^2 - 1$ och antar värdet -13 då $x = -2$.
- 3.13. a) $9x^2 - 49$ b) $4x^2 + 25y^2 + 20xy$ c) 3
d) $18x^2 + 8$ e) $80ab$
- 3.14. 0
- 3.15. a) $4a$ b) $\frac{x}{2}$ c) $2 \cdot (a-2) = 2a-4$
- 3.16. a) $b \cdot (a+b)$ b) $-x$ c) $\frac{1}{x}$
- 3.17. a) $\frac{5}{3x}$ b) $\frac{x+3}{3}$ c) $\frac{x}{5} \cdot (x-2) = \frac{x^2 - 2x}{5}$
d) $4x + 12$
- 3.18. a) $\frac{1}{a+b}$ b) $\frac{a-b}{b}$
- 3.19. a) $\frac{1}{a}$ b) $\frac{-x+12}{(x-2) \cdot (x+3)} = \frac{12-x}{x^2+x-6}$
c) $\frac{b}{a \cdot (a-b)} = \frac{b}{a^2-ab}$ d) $\frac{a-b}{a}$
- 3.20. a) $x = \pm \frac{5}{3}$ b) $x = 7$ eller $x = 15$
c) $x = 0$ eller $x = \frac{16}{15}$ d) $x = 7$
- 3.21. a) $x = -9$ eller $x = -5$ b) $x = -2$ eller $x = 13$
c) $x = 4$ eller $x = \frac{-7}{2}$ d) $x = \frac{2}{3}$ eller $x = -\frac{5}{3}$
e) $x = 2$ eller $x = \frac{4}{3}$
- 3.22. a) $(x-3) \cdot (x+1)$ b) $5 \cdot (x+1) \cdot (x+4)$
c) $(2x-1) \cdot (x+7)$ d) $-3 \cdot (x-1) \cdot (x+8)$
- 3.23. a) $x = 0$ eller $x = -3$ b) $x = 3$ eller $x = -5$
c) $x = 0$ eller $x = \frac{5}{2}$ d) $x = -8$ eller $x = \frac{2}{3}$
- 3.24. $a = -21$ och den andra roten är $x = 7$
- 3.25. a) $x = 4$ eller $x = -1$ b) $x = 3$ eller $x = -10$
c) $x = 7$ eller $x = -2$ d) $x = -3$ eller $x = \frac{7}{3}$
- 3.26. a) $a-3$ b) $a-6$ c) $\frac{a+b}{a-b}$
- 3.27. a) $\begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$
e) $\begin{cases} x = \frac{7}{18} \\ y = \frac{31}{18} \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$
- 3.28. a) $\begin{cases} x = \frac{5}{17} \\ y = \frac{2}{17} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = \frac{25}{14} \\ y = \frac{15}{28} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 20 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = \frac{195}{46} \\ y = \frac{57}{23} \end{cases}$

$$\text{e) } \begin{cases} x = 24 \\ y = 6 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$3.29. \text{ a) } \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

b) Ekvationssystemet saknar lösning, eftersom linjerna är parallella och inte sammanfallande.

c) Ekvationssystemet har oändligt många lösningar, eftersom linjerna är parallella och sammanfallande.

3.30. Kl. 12.20 och 86 km från Sturup.

4. Facit: Funktioner

$$4.1. \text{ a) } p(x) = x + 1 \quad \text{b) } p(x) = 11x - 21x^2$$

$$4.2. \text{ a) } p(3) = 11 \quad \text{b) } p(1) = -1 \quad \text{c) } p(-2) = 26$$

$$4.3. \text{ a) } f(5) = \frac{1}{8} \quad \text{b) } f(-3) = -\frac{1}{4} \quad \text{c) } f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{3}{2} \quad \text{d) } x = -\frac{1}{6}$$

$$\text{e) } x = -\frac{1}{3}$$

$$4.4. \quad f(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$$

$$4.5. \text{ a) } f(3) = -45 \quad \text{b) } f(-5) = 75 \quad \text{c) } x = 0 \text{ eller } x = -2$$

$$\text{d) } f(2x) - f(x) = -7x^3 - 6x^2$$

$$4.6. \text{ a) } f(-2) = 20 \quad \text{b) } f\left(\frac{5}{6}\right) = -\frac{5}{4} \quad \text{c) } f(f(2)) = 32$$

$$\text{d) } x = 5 \text{ eller } x = -\frac{11}{3} \quad \text{e) } \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = 3a + 3b - 4 \text{ (I samband med derivata)}$$

$$\text{f) } \frac{f(3a) - f(a)}{8a} = 3a - 1$$

$$4.7. \text{ a) } h(2) - h(1) = \frac{67}{6} \quad \text{b) } h(3) - h(-2) = \frac{365}{6} \quad \text{c) } h(1) - h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{12}$$

$$4.8. \text{ a) } g(3) - g(1) = \frac{2}{3} \quad \text{b) } g(0) - g(-2) = \frac{38}{3}$$

$$4.9. \text{ a) } f(3) - f(2) = \frac{1}{4} \quad \text{b) } f(-2) - f(-5) = \frac{-213}{100}$$

$$4.10. \text{ a) } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{3}{(3x+3h+1) \cdot (3x+1)}$$

$$\text{b) } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-h-2x}{x^2 \cdot (x+h)^2} \quad \text{c) Derivata}$$

4.11. a) Kulan förflyttar sig 248 meter. b) Medelhastigheten är 30 m/s.

$$\text{c) } \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = 25 + \frac{t_1 + t_2}{2}$$

4.12. a) Kostnadsökningen är 3100 tusen kronor.

b) Den genomsnittliga kostnadsökningen per enhet är 310 tusen kronor.

$$\text{c) } \frac{T(q_2) - T(q_1)}{q_2 - q_1} = 200 + q_1 + q_2$$

5. Facit: Logaritmer

- 5.1. a) 2 b) 4 c) -2 d) -5 e) $\frac{1}{2}$
- 5.2. a) $a = 1000$ b) $a = 0,0001$ c) $a = 0,1$ d) $a = 1$
- 5.3. a) $2a$ b) $a + b$ c) $3a$
- 5.4. a) $100 < t < 1000$ b) $1 < t < 10$ c) $0,1 < t < 1$
d) $100\,000\,000 < t < 10\,000\,000\,000$ eller $10^8 < t < 10^{10}$
- 5.5. a) $\lg 10 = 1$ b) $\lg 5$ c) $\lg 100 = 2$ d) $\lg 0,01 = -2$
- 5.6. a) $x = 15$ b) $x = 4$ c) $x = 24$ d) $x = 5$
- 5.7. a) $3a$ b) $-a$ c) $2 + a$ d) $a - 1$
- 5.8. a) 9 b) $0,2 = \frac{1}{5}$ c) 15 d) $\frac{1}{6}$
- 5.9. $\lg(x^a \cdot y^b \cdot 10^c)$
- 5.10. $\frac{4}{3}$