

Dagens ämnen

- Basbyte i linjära avbildningar
 - Basbytesformeln
- Noll- och värderum
- Sammansättningar av linjära avbildningar
 - Invers avbildning tar vi nästa Fö

Basbytesformeln

Sats 7.4.1. Låt $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ och $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ vara baser i vektorrummet $\mathbb{V}$, T en $n \times n$ -matris sådan att $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T$ och $F: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ en linjär avbildning.

Om F har matrisen $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ i basen $\underline{\mathbf{e}}$ och $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ i basen $\underline{\mathbf{f}}$ så gäller att

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1} A_{\underline{\mathbf{e}}} T.$$

Läs $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T$ -formeln i basbytesformeln

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T, \quad A_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1} A_{\underline{\mathbf{e}}} T$$

Nollrum och värderum

Definition 7.5.1. Låt $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$ vara två vektorrum och $F: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ en linjär avbildning. Då definieras *nollrummet* $N(F)$ och *värderummet* $V(F)$ till F som

$$N(F) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{U}: F(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\} \quad \text{respektive} \quad V(F) = \{F(\mathbf{u}) \in \mathbb{V}: \mathbf{u} \in \mathbb{U}\}.$$

Sats 7.5.2. Låt $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$ vara två vektorrum och $F: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ en linjär avbildning. Då gäller att

- (a) $N(F)$ är ett underrum av $\mathbb{U}$,
- (b) $V(F)$ är ett underrum av $\mathbb{V}$.

Beräkning av $N(F)$ och $V(F)$

- $N(F)$?
 - Lös $AX = 0$ på vanligt sätt.
- $V(F)$?

Sats 7.5.4. Låt $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$ vara två vektorrum och låt $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ vara en bas i $\mathbb{U}$. Betrakta en linjär avbildning $F: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$. Då gäller att

$$V(F) = [F(\mathbf{u}_1), \dots, F(\mathbf{u}_k)].$$

$$V(F)?$$

- Tänk på uppbyggnaden av avbildningsmatrisen!
- $F(\mathbf{e}_i)$:s koordinater är det som står i A :s kolonner.
- För att hitta bas i $V(F)$ behöver löjliga element strykas.
- Beroendeeckvationen för $V(F)$ blir $AX = 0$.
- Slutligen, vill ha ekvationer för $V(F)$ till kontroll och utfyllnad, dvs vill lösa $AX = Y$.

Vi löser alltså ett ekvationssystem men tolkar det på tre olika sätt!

- **Se till att ni har koll på vilken ekvation ni jobbar med!!**

Dimensionssatsen

Sats 7.5.6. (Dimensionssatsen)

*Låt $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$ vara två vektorrum och $F: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ en linjär avbildning. Antag att $\dim \mathbb{U} = n$.
Då är*

$$\dim N(F) + \dim V(F) = n.$$

Sammanfatta avbildningar

Definition 7.6.1. Låt $\mathbb{U}$, $\mathbb{V}$ och $\mathbb{W}$ vara vektorrum och $G: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$, $F: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ linjära avbildningar. Den *sammanfatta avbildningen* $F \circ G: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{W}$ definieras som

$$F \circ G(\mathbf{u}) = F(G(\mathbf{u})).$$

Sats 7.6.2. Låt $G: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ och $F: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ vara linjära avbildningar som i fixa baser i de ändligtdimensionella rummen $\mathbb{U}$, $\mathbb{V}$ och $\mathbb{W}$ beskrivs av matriserna B respektive A . Då är avbildningen $F \circ G: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{W}$ linjär och dess matris, relativt baserna i $\mathbb{U}$ och $\mathbb{W}$, är AB .

Potenser av linjära avbildningar

Sats 7.6.4. Låt $F: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$, $\dim \mathbb{U} < \infty$. Om $N(F) \cap V(F) = \{\mathbf{0}\}$ så gäller för alla heltal $n \geq 2$ att

$$N(F^n) = N(F), \quad V(F^n) = V(F).$$

Inverser till linjära avbildningar

Definition.

Låt $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$ vara vektorrum av ändlig dimension och $F: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ en linjär avbildning. Om det finns en avbildning $G: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{U}$ sådan att

$$G \circ F(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \text{ för varje } \mathbf{u} \in \mathbb{U}$$

$$F \circ G(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \text{ för varje } \mathbf{v} \in \mathbb{V}$$

så säges F vara inverterbar med invers G .

Man kan bevisa att i fall G existerar så är den entydigt bestämd. Vi använder beteckningen $G = F^{-1}$

Lemma 7.6.6.

Antag att $F: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ har en invers $F^{-1}: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{U}$. Då gäller att

- a) $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2 \in \mathbb{U} \implies F(\mathbf{u}_1) \neq F(\mathbf{u}_2)$
- b) $N(F) = \{\mathbf{0}\}$

Anmärkning. En funktion med egenskapen (a) kallas *injektiv*

Exempel 1. Betraktar spegling $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i ett plan Π . Då gäller

$$F \circ F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

för alla vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ vilket ger enligt definition att

$$F = F^{-1}$$

Exempel 2. Betraktar ortogonal projektion $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \Pi$ på ett plan Π som går genom origo. Om $\mathbf{n}$ är en normal vektor till Π då

$$F(t\mathbf{n}) = \mathbf{0} \text{ för alla } t \in \mathbb{R}$$

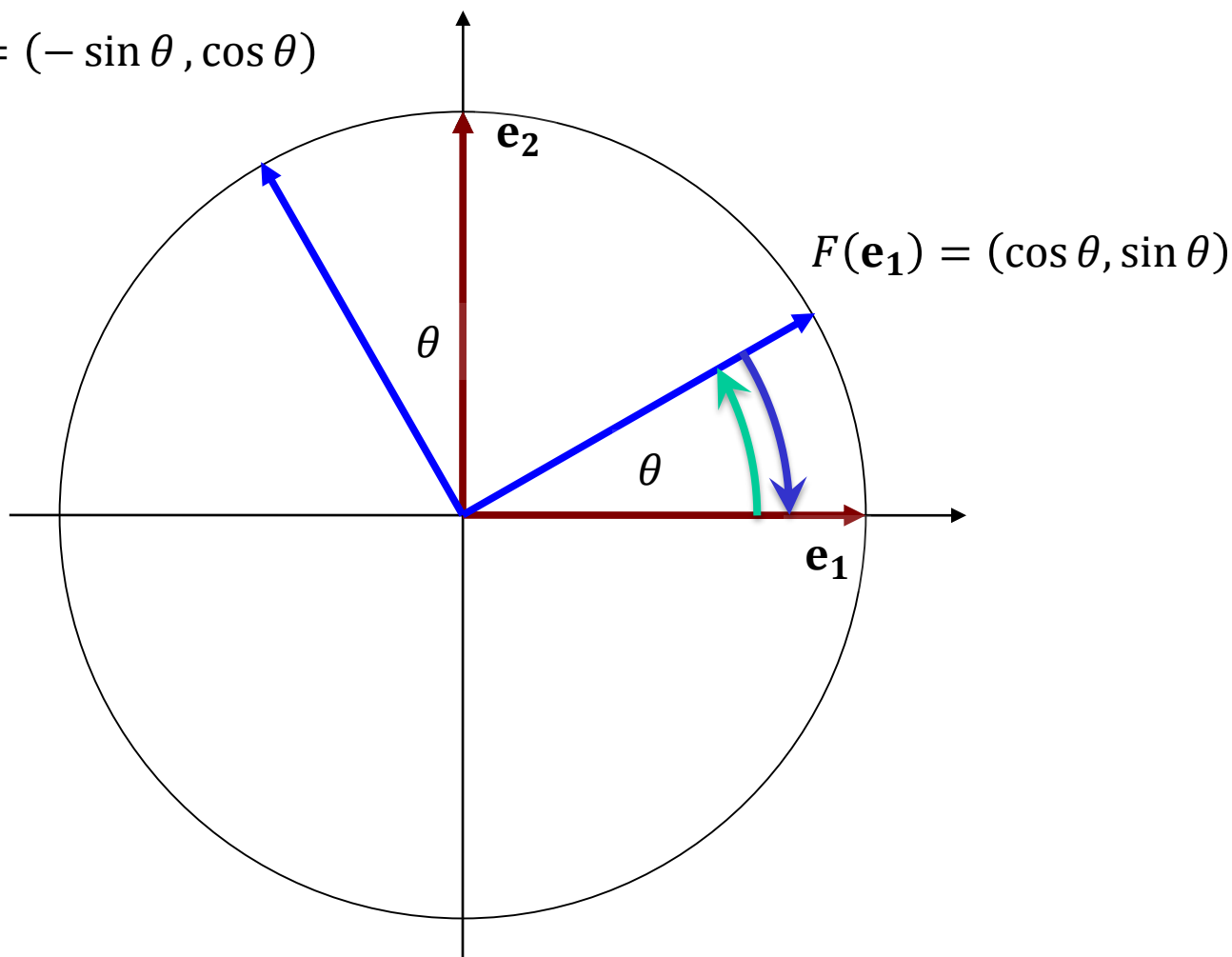
D v s för $\mathbf{u}_1 = \mathbf{n}$ och $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{n}$ gäller att

$$F(\mathbf{u}_1) = F(\mathbf{u}_2) \quad \text{och} \quad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2$$

vilket strider mot Lemma 7.6.6. Följaktligen saknar F invers avbildning

Exempel. Inversen av en vridning i planet.

$$F(\mathbf{e}_2) = (-\sin \theta, \cos \theta)$$



Avbildningsmatris för en vridning i en ON bas är

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow A_\theta^{-1} = A_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Inverser till linjära avbildningar

Sats 7.6.7.

Invers avbildningen F^{-1} är linjär och inverterbar med invers F .

Korollarium 7.6.8.

För att $F: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ skall kunna ha en invers är det *nödvändigt* att

$$\dim \mathbb{U} = \dim \mathbb{V}$$

Om F har en invers så är $V(F) = \mathbb{V}$.

Sats 7.6.9.

Låt $F: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ vara en inverterbar linjär avbildning med avbildningsmatris A relativt baserna $\underline{u}$ och $\underline{v}$ i $\mathbb{U}$ respektive $\mathbb{V}$.

Då är A kvadratisk och inverterbar och A^{-1} är avbildningsmatris, relativt samma baser, till F^{-1}

Jämförelse med ekvationssystemetsatsen

Sats 4.7.1. Låt A vara en $n \times n$ -matris. Följande påståenden är ekvivalenta:

- $\det A \neq 0$
- A är *inverterbar*
- Matrisekvationen $AX = Y$ har entydig lösning för alla $n \times 1$ -matriser Y .
- Matrisekvationen $AX = 0$ har endast den triviala lösningen, $X = 0$.
- $\text{rang } A = n$
- A är radekvivalent med enhetsmatrisen

Vi formulerar om denna sats för linjära avbildningar

Korollarium 7.6.13. Låt $F: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ vara en linjär avbildning med avbildningsmatris A någon bas $\underline{u}$ i $\mathbb{U}$. Då följande påståenden är ekvivalenta:

- a) $\det A \neq 0$
- b) F är *inverterbar*
- c) $V(F) = \mathbb{U}$.
- d) $N(F) = \{\mathbf{0}\}$.