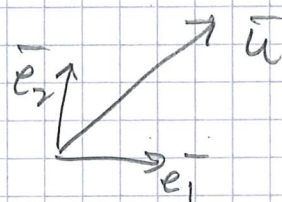


Repetition (basen)

(1)

$\bar{e}_1, \bar{e}_2$ bildar en bas för $\mathbb{R}^2$ om de ej är parallella. Varje vektor $\bar{u} \in \mathbb{R}^2$ kan då skrivas

$$\bar{u} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{e} X$$



Alt $\bar{u} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

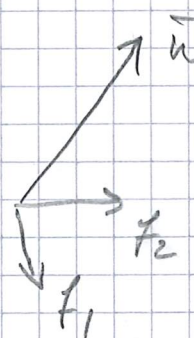
Speciellt $\bar{e}_1 = 1 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 0)$

$$\bar{e}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{standardbasen})$$

Annat bas $\bar{f}_1 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{f}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(ej parallella)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \bar{f}_1 & \bar{f}_2 \end{matrix} \quad \text{basbytesmatris}$$



Samma vektor

$$\bar{u} = y_1 \bar{f}_1 + y_2 \bar{f}_2 = \underline{f} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Obs $\bar{u} = \underline{e} X = \underline{f} Y$

och $\bar{f}_1 = 1 \cdot \bar{f}_1 + 0 \cdot \bar{f}_2 = \underline{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\bar{f}_2 = \underline{f} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

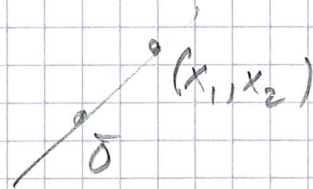
Samband: $X = TY$

(2)

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \end{cases}$$

Ex Linje $x_1 + 2x_2 = 0$

blir $y_1 + y_2 + 2(y_1 - y_2) = 0$



$$\Leftrightarrow 3y_1 - y_2 = 0 \quad \text{i den nya basen.}$$

$\mathbb{R}^n$, $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ standard ON-bas.

Da $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$ ny bas för $\mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow$ vektorerna linjärt obero

$\Rightarrow$ Beräkna de kv

$$t_1 \bar{f}_1 + t_2 \bar{f}_2 + \dots + t_n \bar{f}_n = \bar{0}$$

har endast lös $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$

Dvs, om T är matrisen med

$\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$ som kolonner, ska

ekv. systemet $TX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \bar{f}_1 & \bar{f}_2 & \dots & \bar{f}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

ej ha param. lös

$$\Rightarrow \det T \neq 0 \Leftrightarrow T^{-1} \text{ existerar}$$

(3)

Def: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ är ett underrum i $\mathbb{R}^n$
om $\bar{u}, \bar{v} \in U \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in U$
och $t\bar{u} \in U$ för alla $t \in \mathbb{R}$.

Vektorerna $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k$ bildar en bas
för U om de är linjärt oberoende

och genererar U ,

dvs

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{f}_1 & \bar{f}_2 & \dots & \bar{f}_k \end{pmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}$$

(ber. ekv.) har
endast lösning

$$t_1 = \dots = t_k = 0$$

(ej param. lösning)

och $U = [\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k]$. Då är $\dim U = k$.

Def: Det ortogonala komplementet

$$U_{\perp} = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n; \bar{x} \cdot \bar{u} = 0 \text{ för alla } \bar{u} \in U \}$$

dvs alla vektorer ortog. mot alla
vektorer i U .

Vi har $\dim U + \dim U_{\perp} = n$

(4)

Ex: Låt

$$U = \left[e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

Bestäm en bas för U .Bestäm en bas för $U^\perp$.Beskriv U som Lösningrum till ett system av ekvationer.

Lösning: Vi löser beroendeekv. med $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$
i högerledet:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & x_1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & x_2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & x_3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & x_4 \end{array} \right) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 2x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 + x_3 + x_4 \end{array} \right)$$

töjliga

Bas för U : $e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

 U som Lösningrum:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(obs basrekt, uppf. ekv. systemet)

Bas för $U^\perp$: $e \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Obs! ej ON-bas (använd t.ex. Gram-Schmidt)

Ex: Antag F är en linjär avb.
(forts) så att $F(\bar{x}) = \underline{e} A X$,

med avbildningsmatris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

dvs med gen. för U som kolonner

Bestäm bas för $V(F)$.

$N(F) \cap V(F)$

Bestäm bas för $N(F)$.

Lösning:

Eftersom

$$V(F) = \{ \text{alla linjärkombin. av} \\ \text{kol. i } A \} = U,$$

är

$$\underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en bas} \\ \text{för } V(F)$$

$N(F)$ består av lös. till $AX=0$
dvs $N(F)$ är lös. rummet till

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \end{cases} \\ (\text{enl. ovan})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = -s - t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$$

Så en bas för $N(F)$

blir

$$\underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$