

Föreläsning 1

1

(Linjära) Ekvationssystem

x, y, z obekanta

r, s, t reella tal

$x_1, x_2, x_3, \dots$

k, m, n heltal

$y_1, y_2, \dots$

$t \in \mathbb{R}$

↑
tillhöi

reella tal

$k \in \mathbb{Z}$

↑
heltal

$k = 1, 2, 3, \dots$

Ex:

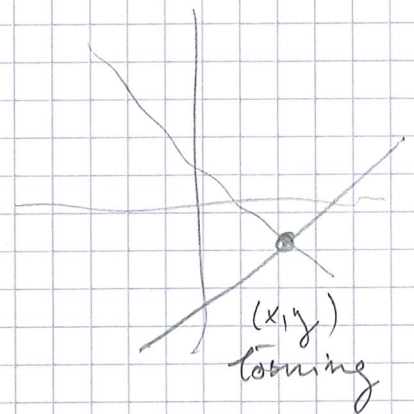
Hitta alla reella tal x, y som uppfyller

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = 2x - 8 \end{cases}$$

↑
"om och endast om"
ekvivalensspil



Substitution:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 1 \\ -x + 1 = 2x - 8 \end{cases}$$

$$\text{ger } \begin{cases} y = -x + 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

↪

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 + 1 = -2 \end{cases}$$

Alt: Successiv elimination

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -2 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -2 \\ -3y = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y = \frac{6}{-3} = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 - y = 1 + 2 = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

"x-termen elimineras i den andra ekv."

Ex: $\begin{pmatrix} (-5) \\ (2) \end{pmatrix} \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10x - 5y = 5 \\ 10x - 4y = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = -1 \\ -9y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(-y-1) = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

Fler obekanta

Ex $\begin{pmatrix} (-1) & (-2) \end{pmatrix} \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 3y + 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} (-5) \\ (8) \end{pmatrix} \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -8y + 5z = -3 \\ -5y + 5z = 0 \end{cases}$

↑
eliminera x

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -8y + 5z = -3 \\ 15z = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y + z + 2 \\ -8y = -5 - 3 \\ z = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

Plöjer saker kan hända

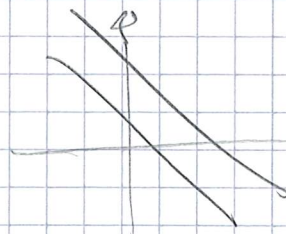
Ex $\begin{pmatrix} (-1) & (-2) \end{pmatrix} \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ x - 3y + 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} (-1) \end{pmatrix} \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -5y + 5z = -1 \\ -5y + 5z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -5y + 5z = -1 \\ 0 = 1 \end{cases}$

Ingen lösning

Jämför

$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$



ingen
skärning.

Om alla tal i högerledet är 0,

kallas systemet homogent

Ex

$$\begin{pmatrix} (-1) & (-2) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

homogent
- har alltid minst
en lösning: $x=y=z=0$
(kallad trivial)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (-1) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -5y + 5z = 0 \\ -5y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (-\frac{1}{5}) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -5y + 5z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Tre obek., två ekv.

Om t.ex. $z=1$, blir $y=z=1$ och $x=-2y+z=-2+1=-1$
Så $x=-1, y=1, z=1$ är en lös.

Om $z=3$ blir $y=z=3$ och $x=-2y+z=-6+3=-3$
Så $x=-3, y=3, z=3$ är även lös

Finns oändl. många lös.

En lös för varje val av z .

Vi uttrycker samtliga med en parameter

Sätt $z=t$, där $t \in \mathbb{R}$ är parameter

Då är $y=z=t$ och

$$x = -2y + z = -2t + t = -t$$

Samtliga lösningar blir alltså

(4)

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \text{ där } t \in \mathbb{R}.$$

Ex

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

fyra obek., tre ekv.
(param. behövs)

Sätt $x_4 = t$. Då är $x_3 = x_4 = t$,

$$x_2 = x_3 - x_4 = t - t = 0, \text{ och}$$

$$x_1 = x_2 - x_3 - x_4 = 0 - t - t = -2t$$

Lösning:

$$\begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \\ x_4 = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$t \text{ ex } (-2, 0, 1, 1), (2, 0, -1, -1),$$

$$(-6, 0, 3, 3) \text{ osv.}$$

Lösningen är på parameterform

Fler parametrar

Ex

$$\begin{array}{l} (-1) \quad (-2) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow (-1) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. \quad 4 \text{ obek}, 2 \text{ ekv.}$$

Om x_4 är ett tal, t.ex. 4 blir andra ekv

$$x_2 + x_3 = -4 \text{ med oändl.}$$

många lösningar ($x_2 = -4 - x_3$).

Vi kan beskriva samtliga med två parametrar:

$$x_4 = t, \quad x_3 = s \quad \text{ger}$$

$$x_2 = -s - t \quad \text{och}$$

$$x_1 = -x_2 - x_3 - 2x_4 = s + t - s - 2t = -t$$

Så

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -t \\ x_2 = -s - t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{array} \right.$$

, $s, t \in \mathbb{R}$ (param.)

Man kan kalla lösningen

att testa $(0, -1, 1, 0)$ (för s)

och $(-1, -1, 0, 1)$ (för t) i urspr.

ekvationerna

(6)

Allmänt:

- (1) Om n st obekanta och k ($\leq n$) ekvationer kvar efter elimination, får man $n-k$ parametrar
- (2) Det finns ingen, en eller oändligt många lösningar till ett linjärt ekv. system. Om homogent finns alltid minst en (trivial)

Ex:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

5 obek , 2 ekv $\Rightarrow 5-2=3$ param.

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -(s-3t) - r - s - t \\ x_2 = x_4 - 3x_5 = s - 3t \\ x_3 = r \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x_1 = -r - 2s + 2t \\ x_2 = s - 3t \\ x_3 = r \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}$$

Matrisform

7

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{uppf. ekv.}$$

EX

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$$

4 obek
- 1 ekv
3 param

$$\begin{cases} x_1 = -2r - s + 2t \\ x_2 = r \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$$

Obs $(-2, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$

och $(2, 0, 0, 1)$ uppf. ekv.

EX

Hur många lösningar för olika a ?

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ (a-2)y = 1 \end{cases}$$

Om $a = 2$:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

ingen lösning

Om $a \neq 2$:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = \frac{1}{a-2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y = 3 - \frac{2}{a-2} \\ y = \frac{1}{a-2} \end{cases}$$

(en lösning för varje $a \neq 2$)