

Föreläsning 10

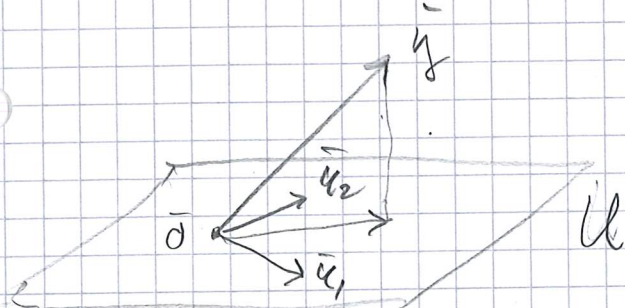
1

Minsta kvadratmetoden

Ex Tag $\bar{u}_1 = e \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$

och bilda underrummet $U = [\bar{u}_1, \bar{u}_2]$.

Vi ska projicera vektorn $\bar{y} = e \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix}$ på U .



Ekvationssystemet

$$x_1 \bar{u}_1 + x_2 \bar{u}_2 = \bar{y} \Leftrightarrow x_1 e \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix}$$

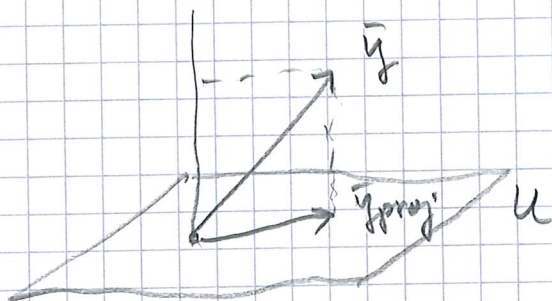
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 + x_2 = 6 \\ 3x_1 + x_2 = 10 \\ 4x_1 + x_2 = 12 \\ 5x_1 + x_2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$A X = Y$$

har ingen lös. så $\bar{y} \notin U$.

(-r₁ + r₂ ger $x_1 = 1$ och -r₁ + r₃ ger $x_1 = \frac{5}{2}$)

Vi har ett överbestämt system utan lös



Vi kan däremot lösa ekv. systemet om vi byter ut talen i högerledet till koord. för projektionen $\bar{y}_{proj}$.

$$x_1 \bar{u}_1 + x_2 \bar{u}_2 = \bar{y}_{proj} \quad \text{har lös}.$$

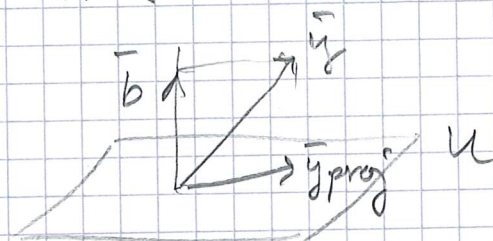
Denna lös kallas minsta kvadratlös för systemet.

Antag att vi har en sådan lös $\varepsilon AX = \bar{y}_{proj}$.

Då uppfyller vektorn $\bar{b} = \bar{y} - \bar{y}_{proj}$

att $\bar{b} \in U_{\perp}$, speciellt

$$\begin{cases} \bar{u}_1 \cdot \bar{b} = 0 \\ \bar{u}_2 \cdot \bar{b} = 0 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{u}_1 \cdot (\bar{y} - \bar{y}_{proj}) = 0 \\ \bar{u}_2 \cdot (\bar{y} - \bar{y}_{proj}) = 0 \end{cases} \quad \text{Om } \bar{y} = \varepsilon Y \text{ och } \bar{y}_{proj} = \varepsilon AX,$$

Kan vi alltså skriva systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} (Y - AX) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{på matrisform}$$

$$\Leftrightarrow A^t(Y - AX) = 0 \Leftrightarrow A^t Y - A^t A X = 0.$$

Med andra ord,

$$A^T A X = A^T y$$

Denna ekv. kallas normalekvationen för ekv. systemet vi startade med.

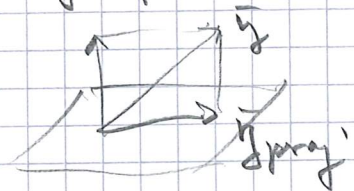
Lösningen $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (dvs minsta kv. lös.)

är sådan att

$$eAX = \bar{y}_{\text{proj}},$$

dvs projektionen av $\bar{y}$ på U .

Minsta avståndet från $\bar{y}$ till U är då



$$|\bar{y} - \bar{y}_{\text{proj}}| = |\bar{y} - eAX|$$

Ex (forts)

Normalekv. för systemet vi startade med blir

$$A^T A X = A^T y$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 55 & 15 & 180 \\ 15 & 5 & 50 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Minsta kvadratlösningen är alltid

(4)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ och}$$

proj. av $\bar{y}$ på U är alltid

$$\bar{y}_{\text{proj}} = \underline{e} A X = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 10 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Ex:

Bestäm minsta kvadratlösningen till

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = Y$$

Normal ekv:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 14 & 14 & 0 \\ 14 & 19 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Minsta kv. lösning } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Även:

Projektionen av $\bar{y} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ på

$$U = \left[\underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{e} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \text{ (plan i rummet)}$$

$$\text{är } \underline{e} A X = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$