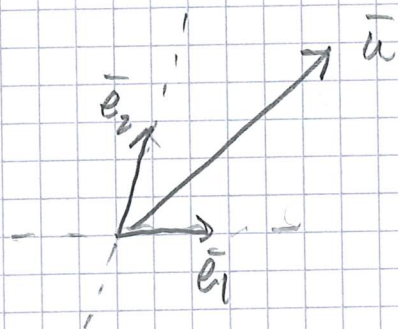


Föreläsning 12

1

$\bar{e}_1, \bar{e}_2$ bas för $\mathbb{R}^2$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^2$



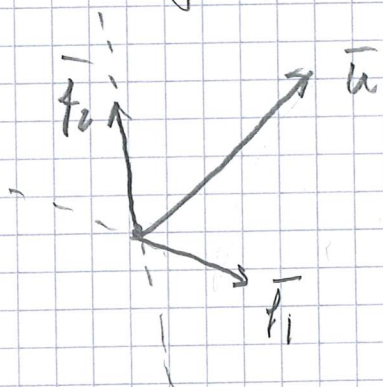
$$\begin{aligned}\bar{u} &= x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 = (\bar{e}_1 \ \bar{e}_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \underline{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{e} X\end{aligned}$$

speciellt är

$$\bar{e}_1 = 1 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_2 = 0 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Antag $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ är en annan bas för $\mathbb{R}^2$:



Obs att

$$\begin{aligned}\bar{f}_1 &= 1 \cdot \bar{f}_1 + 0 \cdot \bar{f}_2 \\ &= (\bar{f}_1 \ \bar{f}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\bar{f}_2 = 0 \cdot \bar{f}_1 + 1 \cdot \bar{f}_2 = \underline{f} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Antag att $\bar{u}$ är samma vektor som ovan. Då är

$$\bar{u} = y_1 \bar{f}_1 + y_2 \bar{f}_2 = \underline{f} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underline{f} Y$$

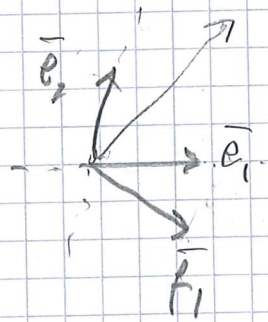
för tal y_1, y_2 .

Vad är sambandet mellan X och Y ?

Obs att $\bar{f}_1$ och $\bar{f}_2$ är vektorer i $\mathbb{R}^2$, (2)
så man kan skriva

$$\bar{f}_1 = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\bar{f}_2 = c\bar{e}_1 + d\bar{e}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$



för några tal a, b, c, d .
Så

$$\underline{f} = (\bar{f}_1 \ \bar{f}_2) = (a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 \quad c\bar{e}_1 + d\bar{e}_2)$$

$$= (\bar{e}_1 \ \bar{e}_2) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \underline{e} T.$$

T kallas basbytematrisen.

Vi har nu

$$\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 = y_1\bar{f}_1 + y_2\bar{f}_2$$

$$\Leftrightarrow \underline{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{f} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$\text{dvs} \quad \underline{e} X = \underline{f} Y \Leftrightarrow \underline{e} X = \underline{e} T Y,$$

och det följer att sambandet
mellan koordinaterna ges av

$$X = TY, \text{ där } T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

(kol. i T är koord. för $\bar{f}_1 \ \bar{f}_2$)

dvs

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$X = TY$$

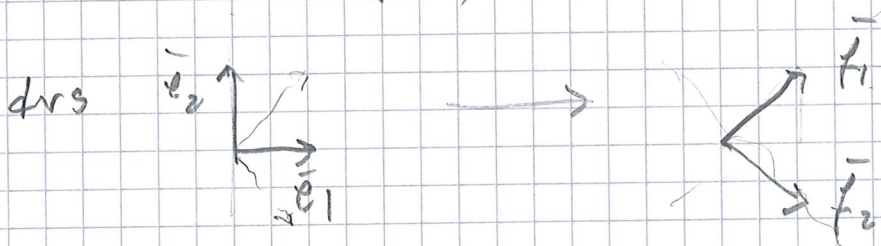
(3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a y_1 + c y_2 \\ x_2 = b y_1 + d y_2 \end{cases} \quad \text{och} \quad T^{-1}X = Y$$

Ex

$$\bar{u} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad \text{Nytt Bas till}$$

$$\bar{f}_1 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Såta $\bar{u} = \underline{f} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, och $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
 $\bar{f}_1 \quad \bar{f}_2$

Så

$$TY = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ nya koord $\uparrow$ gamla koord

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{3}{2} \\ y_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Så} \quad \bar{u} = \frac{3}{2} \bar{f}_1 - \frac{1}{2} \bar{f}_2 = \underline{f} \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

(4)

Attvärn t:

Om $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ är en bas för $\mathbb{R}^n$
 och vi byter till $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$, är

$$\bar{u} = \underline{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{I} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{dvs}$$

$$\bar{u} = \underline{e} X = \underline{I} Y \quad \text{om} \quad X = T Y,$$

där $T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \bar{f}_1 & \bar{f}_2 & \dots & \bar{f}_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$ är basbytes-
 matrisen.

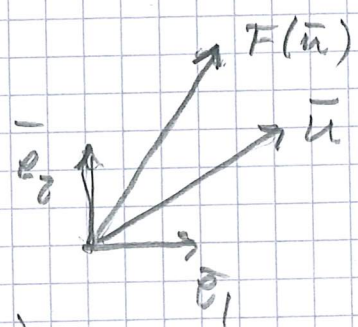
$$\text{Obs att } Y = T^{-1} X.$$

T^{-1} existerar eftersom kol. i T
 bildar en bas, så de är lin. oavh.

(5)

Antag att $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ är en
linjär avbildning. Låt $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ vara
en bas för $\mathbb{R}^2$.

Tag $\bar{u} = eX = e \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$



Då är

$$F(\bar{u}) = F(eX) = e \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = eAX$$

$F(\bar{e}_1) \quad F(\bar{e}_2)$

för någon matris A .

Spec. är $F(\bar{e}_1) = e \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $F(\bar{e}_2) = e \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

hos vektorer i basen $\bar{e}_1, \bar{e}_2$.

Vi skriver $A_e = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ för alla

markera att kol. anges i basen $\bar{e}_1, \bar{e}_2$.

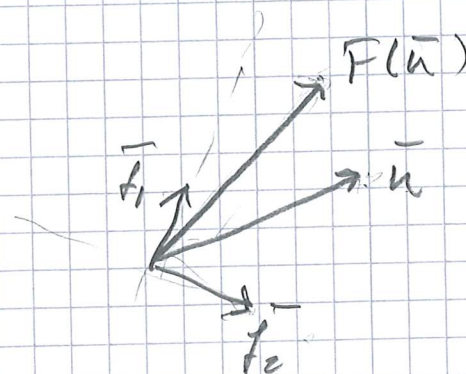
Nu gör vi samma sak i en
annan bas.

Låt $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ vara en bas för $\mathbb{R}^2$.

(5)

$\bar{u}$ och $F(\bar{u})$ är då

samma vektorer som
innan, men med
andra koordinater



$$\bar{u} = \underline{\pm} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underline{\pm} Y,$$

och om $F(\bar{f}_1) = \underline{\pm} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$

$$F(\bar{f}_2) = \underline{\pm} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$$

så är

$$F(\bar{u}) = \underline{\pm} \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$F(\bar{f}_1) \quad F(\bar{f}_2)$

dvs allt uttrycks i basen $\bar{f}_1, \bar{f}_2$.

Vi betecknar avbildningsmatrisen
med A_f ,

dvs $F(\bar{u}) = \underline{\pm} A_f Y$ om $\bar{u} = \underline{\pm} Y$.

Vad är sambandet mellan matriserna

A_c och A_f ?

sätt $\bar{u} = \underline{e} X = \underline{f} Y$, där

(7)

$$\underline{f} = \underline{e} T, \quad X = T Y, \quad Y = T^{-1} X$$

som tidigare.

Då är

$$F(\bar{u}) = \underline{e} A_e X = \underline{f} A_f Y,$$

så

$$\underline{e} A_e X = \underline{e} T A_f T^{-1} X,$$

vilket ger sambandet $A_e = T A_f T^{-1}$

$$T^{-1} A_e T = A_f$$

Ex Låt $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ortogonal

projektion på linjen $x_1 + x_2 = 0$

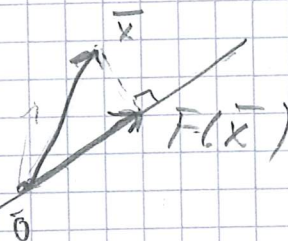
Bestäm A_e .

Lös

Alt 1. Som tidigare kan vi
projicera $\bar{e}_1$ och $\bar{e}_2$ på

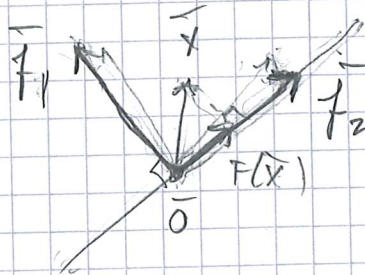
linjen och på så vis få
kolonnerna i A_e .

Alt 2: "Smart" basbyte.



Vi byter till en bas $\bar{f}_1, \bar{f}_2$
 som gör att vi kan skriva
 upp A_f direkt. Sedan
 används $A_e = T A_f T^{-1}$.

Linjen
 $x_1 + x_2 = 0$



Sätt

$$\bar{f}_1 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{normal till linjen})$$

$$\bar{f}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{parallell med linjen (riktv. vektor)})$$

$$(\text{spec. } \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 = 0)$$

Då

$$F(\bar{f}_1) = \bar{0} = \underline{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

och

$$F(\bar{f}_2) = \bar{f}_2 = 0 \cdot \bar{f}_1 + 1 \cdot \bar{f}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Så

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$F(\bar{f}_1) \quad F(\bar{f}_2)$

$$\text{Med } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{för man } T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\bar{f}_1 \quad \bar{f}_2$

och

$$A_e = T A_f T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

(obs att om $T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$,

9

$$\bar{a} \quad T^{-1} = \frac{1}{\det T} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

EX (jämför ex på Fö 11)

Antag $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ är spegling i
planet $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

Bestäm A_F .

Lös Vi byter bas.

Låt $\bar{f}_1 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (normal till
planet)

Tag $\bar{f}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_3 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i planet
(ej parallella)

Da' är

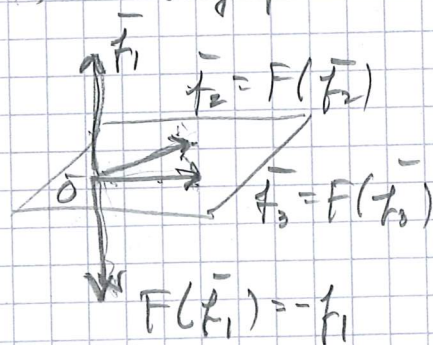
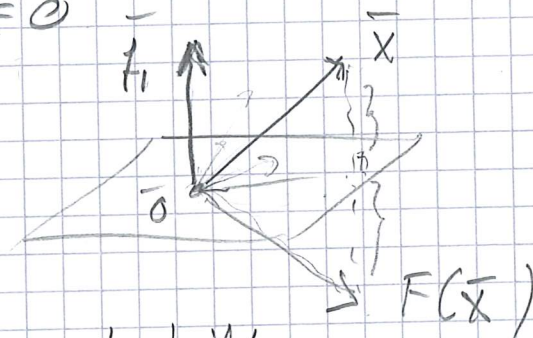
$$F(\bar{f}_1) = -\bar{f}_1 = -\underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F(\bar{f}_2) = \bar{f}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F(\bar{f}_3) = \bar{f}_3 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{sic att}$$

$$A_F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Räkning ger $T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,



och

(10)

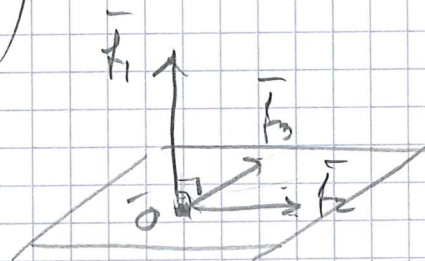
$$A_e = T A_f T^{-1} = \dots = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ex: Om $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ istället
hade varit ort. projⁿ på $x_1 + x_2 - x_3 = 0$
så skulle det bli som ovan
att

$$F(\bar{f}_1) = \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(\bar{f}_2) = \bar{f}_2, \quad F(\bar{f}_3) = \bar{f}_3$$

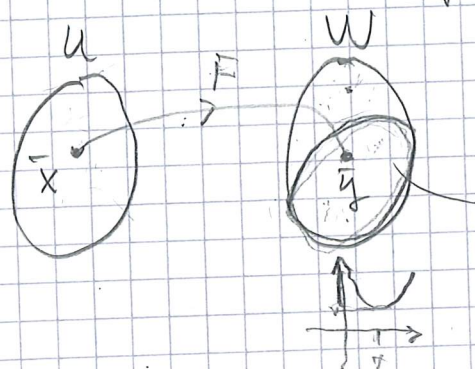
$\mathbb{R}^3$

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{för proj.}$$



$F: U \rightarrow W$ linjär aub.

(11)



$$F(\bar{x}) = \bar{y}$$

Värdeområde = alla $\bar{y} \in W$ som är bilden av något $\bar{x} \in U$.

Def: Värdet rummet till F definieras

som $V(F) = \{ F(\bar{x}) ; \bar{x} \in U \}$,

och är ett under rum i W .

Ex: Antag

$$F(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 \end{pmatrix}$$
$$= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix},$$

dvs $V(F)$ genereras av kolonnerna i avbildningsmatrisen.

Alm: $V(F) = [F(\bar{e}_1), F(\bar{e}_2), \dots, F(\bar{e}_n)]$,

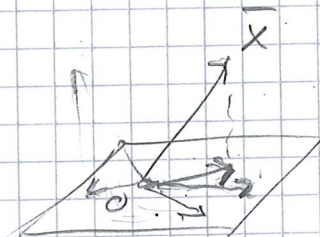
om $\dim U = n$, bas $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$.

Ex: $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ort. proj. på planet
 $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

(12)

$$F(\bar{x}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$V(F) = \text{planet } x_1 + x_2 - x_3 = 0$



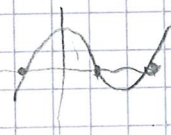
Planet gen. av kol. i matrisen

Bas för planet ($= V(F)$)

är tex $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
 (kolla uppf. ekv)

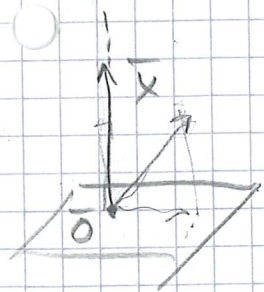
Def: Nollrummet till F består av alla vektorer som avbildas på $\vec{0}$

$$N(F) = \{ \bar{x} ; F(\bar{x}) = \vec{0} \}$$



och är ett under rum i U .

Ex F ort. proj. på planet $x_1 + x_2 - x_3 = 0$



$N(F) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$, ty alla vektorer parallella med normalvektorn projiceras på $\vec{0}$ och någon annan vektor proj. på $\vec{0}$.

Ex: $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ lin. mb som ges
av

$$F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 8 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Nollrum?

$$F(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \underline{A} \vec{x} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

4 obek
-2 ekv
2 param

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -5 - 2t \\ x_2 = -5 - t \\ x_3 = 5 \\ x_4 = t \end{cases}, \text{ s\aa en bas}$$

f\o r $N(F)$ \aa $\underline{e} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\dim N(F) = 2$

Bas f\o r $V(F)$? j\aa mf\o r ber. ekv

$V(F)$ ges av kolonnerna i A

Trappan ovan visar att $\dim V(F) = 2$
och basen blir (t ex)

$$\underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{e} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(en kol. p\aa varje trappsteg)