

Föreläsning 13

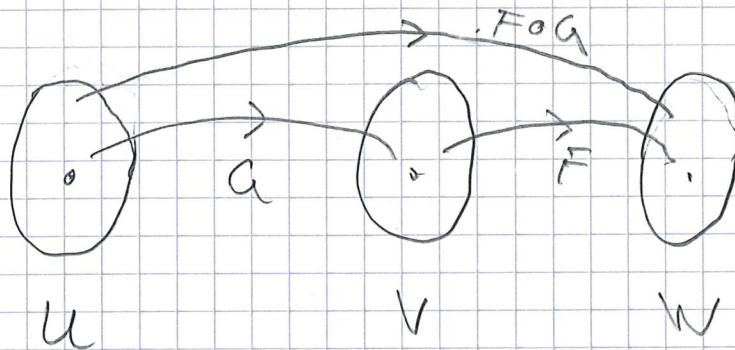
1

Sammansättnings

U, V, W vektorrum

Antag $G: U \rightarrow V$, $F: V \rightarrow W$ är linjära avb.

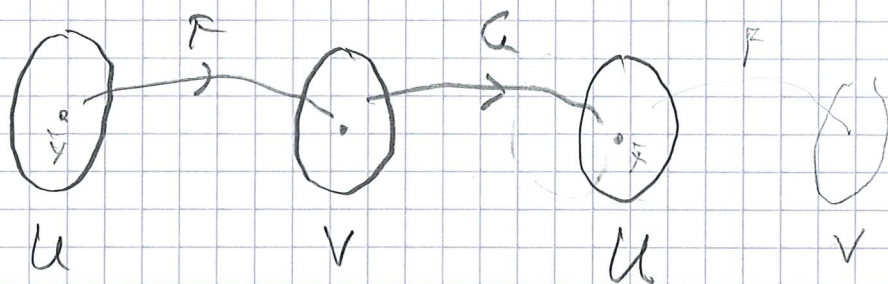
$F \circ G: U \rightarrow W$ definieras som den linjära avb.
 $F(G(\bar{x}))$, $\bar{x} \in U$.



Om $G(\bar{x}) = G(\underline{e}_1 X) = \underline{e}_2 A X$ för $\bar{x} \in U$, och
 $F(\bar{y}) = F(\underline{e}_2 Y) = \underline{e}_3 B Y$ för $\bar{y} \in V$,
(obs $\underline{e}_1$ bas för U , $\underline{e}_2$ för V , $\underline{e}_3$ för W)

$$\begin{aligned} \text{blir } F \circ G(\bar{x}) &= F(G(\bar{x})) = F(\underline{e}_2 A X) \\ &= \underline{e}_3 B(A X) = \underline{e}_3 (B A) X, \text{ dvs} \end{aligned}$$

man kan se att $F \circ G$ har avbildnings-
matris BA .



Def: Antag $F: U \rightarrow V$ är linjär.

Om det finns en linjär avb.

$G: V \rightarrow U$ så att

$$G \circ F(\bar{x}) = \bar{x} \text{ för varje } \bar{x} \in U,$$

$$\text{och } F \circ G(\bar{y}) = \bar{y} \text{ för varje } \bar{y} \in V,$$

såges F vara inverterbar med

invers G . Vi skriver F^{-1} för G .

Obs att då $F \circ F^{-1}(\underline{e}_X) = \underline{e}_{BAX}$,

vilket är $\underline{e}_X$ då $B = A^{-1}$.

Man kan se att F^{-1} har avb.

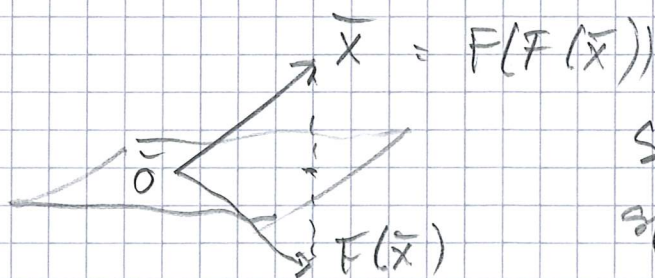
matris A^{-1} (om ändl dim. vektorrum)

Ex:

Om F är spegling i ett plan

i $\mathbb{R}^3$, är $F \circ F(\bar{x}) = \bar{x}$

så F är inv. bar med invers $F^{-1} = F$.



Så $A^{-1} = A$ för spegling.

Sats: $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linjär,

$$F(\bar{x}) = F(\underline{e}X) = \underline{e}AX.$$

Da är

F inverterbar

$$\Leftrightarrow \det A \neq 0 \quad (\text{dvs } A \text{ inv. bar})$$

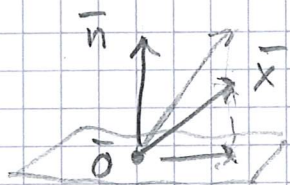
$$\Leftrightarrow V(F) = \mathbb{R}^n \quad (\text{dvs kol. i } A \text{ bildar en bas för } \mathbb{R}^n)$$

$$\Leftrightarrow N(F) = \{\bar{0}\} \quad (\text{enligt dim.satsen är } \dim V(F) + \dim N(F) = n)$$

Ex

Projektion är ej inv. bar, ty

$$N(F) \neq \{\bar{0}\}$$



Ex:

$$F(\bar{x}) = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X$$

$$\det A = 1 + 1 = 2 \neq 0 \quad \text{så}$$

F inv. bar och kol. linj. obero.

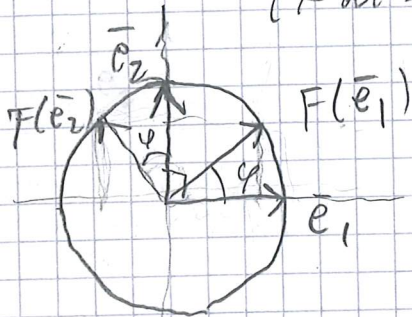
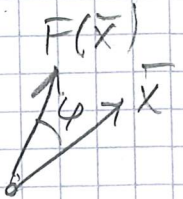
EX

$\mathbb{R}^2$, $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ högerorienterad ON-bas

(4)

$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rotation av

en vektor φ radianer motsats
(φ är linjier) (eller grader)



$$F(\bar{e}_1) = \underline{e} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$F(\bar{e}_2) = \underline{e} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) \\ \sin(\frac{\pi}{2} + \varphi) \end{pmatrix}$$

$$= \underline{e} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} \cos \varphi - \sin \frac{\pi}{2} \sin \varphi \\ \sin \frac{\pi}{2} \cos \varphi + \sin \varphi \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

ger

$$F(\bar{x}) = \underline{e} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}}_{\text{rot. matrix}} \bar{x}$$

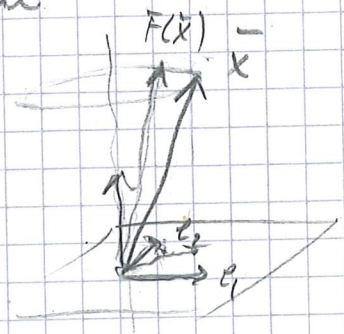
Obs: $N(F) = \{\vec{0}\}$
så F inv. kan

EX:

$\mathbb{R}^3$, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ högerorienterad ON-bas

$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rotation φ rad motsats
runt $\bar{e}_3$ -axeln

$$F(\bar{x}) = \underline{e} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}$$



Ex: Låt $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara rot. φ -rad
moturs kring vektorn $\bar{n} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Vad är A_φ ?

Betrakta planet

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$

ortog. mot $\bar{n}$.

Bilda en ny ON-bas:

$$\bar{f}_3 = \frac{1}{|\bar{n}|} \bar{n} = \frac{1}{\sqrt{14}} \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (\text{längs rotaxeln})$$

$$\bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i planet ort. mot } \bar{f}_3$$

$$\text{och } \bar{f}_1 = \bar{f}_2 \times \bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{42}} \underline{e} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Di blir $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ en högerorienterad
ON-bas

$$\text{och } A_f = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \bar{f}_1 & \bar{f}_2 & \bar{f}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$\text{och } T^{-1} = T^t \quad (\text{ty kol. } \bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3 \text{ ON-bas})$$

ortog. matris

$$\text{och } A_\varphi = T A_f T^{-1} = T A_f T^t = \dots$$

Isometrier

6

$\mathbb{R}^n$ standardskalärprodukt

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \underline{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \underline{e} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

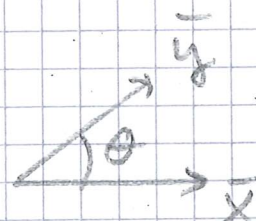
om $\underline{e} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ ON-bas för $\mathbb{R}^n$

Längden def. av

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Spec. för $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \theta$$

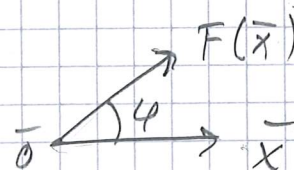


dvs

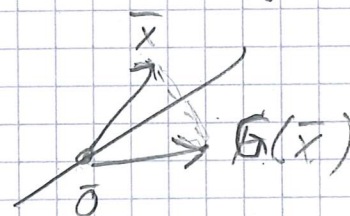
$$\cos \theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|}$$

Exempel på linjär avb i $\mathbb{R}^2$:

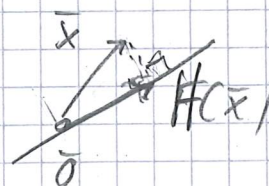
(1) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rot 4 grad
moturs



(2) $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ spegling i
linje



(3) $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ort. proj
på linje



Spec: F, G bevarar längden av $\vec{x}$

Def Den linjära avb. $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

(7)

kallas isometrisk om

$$|F(\vec{x})| = |\vec{x}|$$

Vi försöker hitta andra sätt att
avgöra isometri:

Om F är isometrisk, är

$$|F(\vec{u} + \vec{v})|^2 = |\vec{u} + \vec{v}|^2, \quad \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow F(\vec{u} + \vec{v}) \cdot F(\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$$

$$\begin{aligned} \text{VL} &= (F(\vec{u}) + F(\vec{v})) \cdot (F(\vec{u}) + F(\vec{v})) \\ &= F(\vec{u}) \cdot F(\vec{u}) + 2 F(\vec{u}) \cdot F(\vec{v}) + F(\vec{v}) \cdot F(\vec{v}) \\ &= |F(\vec{u})|^2 + 2 F(\vec{u}) \cdot F(\vec{v}) + |F(\vec{v})|^2 \\ &= |\vec{u}|^2 + 2 F(\vec{u}) \cdot F(\vec{v}) + |\vec{v}|^2 \end{aligned}$$

$$\text{HL} = |\vec{u}|^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 \quad \text{med likn. räkning}$$

Det följer att $F(\vec{u}) \cdot F(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$

för alla $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$
(dvs även vinklar bevaras)

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

Speciellt:

Om $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ är en ON-bas

$$\text{för } \mathbb{R}^n \quad \left(\begin{array}{l} \text{dvs} \quad \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 1 \quad \text{för } i=j, \dots, n \\ \text{och} \quad \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0 \quad \text{för } i \neq j \end{array} \right)$$

följer att

$$\begin{aligned} F(\bar{e}_i) \cdot F(\bar{e}_j) &= \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 1 \quad \text{för } i=j, \dots, n \\ \text{och} \quad F(\bar{e}_i) \cdot F(\bar{e}_j) &= \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0 \quad \text{om } i \neq j \end{aligned}$$

dvs $F(\bar{e}_1), \dots, F(\bar{e}_n)$ är en ON-bas för $\mathbb{R}^n$.

Sats: $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linjär, $F(\bar{x}) = EAX$

Då är F isometrisk

$$\Leftrightarrow |F(\bar{x})| = |\bar{x}|$$

$$\Leftrightarrow F(\bar{x}) \cdot F(\bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$\Leftrightarrow$ kolumnerna i A bildar en ON-bas

$$\Leftrightarrow A^{-1} = A^t \quad \left(\begin{array}{l} A \text{ är en} \\ \text{ortonormal} \\ \text{matris} \end{array} \right)$$

Ex Om A ortonormal:

$$\begin{aligned} A^t A &= \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ f_2 & \dots & f_n \\ f_3 & \dots & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \cdot f_1 & f_1 \cdot f_2 & f_1 \cdot f_3 \\ f_2 \cdot f_1 & f_2 \cdot f_2 & f_2 \cdot f_3 \\ f_3 \cdot f_1 & f_3 \cdot f_2 & f_3 \cdot f_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dvs } A^{-1} = A^t. \end{aligned}$$

$\underbrace{f_1 \ f_2 \ f_3}_{\text{ON-bas}}$

Si, för en isom. avb är matrisen ⑨
 ortogonal, och

$$A^{-1} = A^t \Leftrightarrow \det A^{-1} = \det A^t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\det A} = \det A \Leftrightarrow (\det A)^2 = 1$$

Sats: För en ortogonal matris
 gäller $\det A = 1$ el -1 .

Ex $\mathbb{R}^2$: För en isom. avb $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

finns endast två alternativ
 (kol. bildar ON-bas)

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

dvs rotation, $\det A = 1$

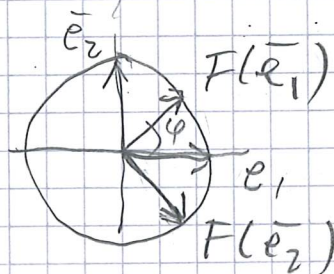
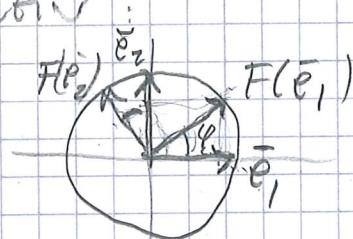
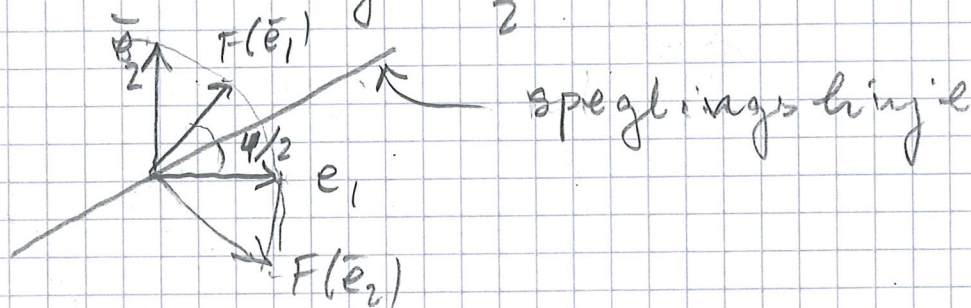
eller

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

$\det A = -1$

vilket är en spegling i

en linje $\frac{\varphi}{2}$ radianer mot $\bar{e}_1$.



Ex: $F(\vec{x}) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \vec{x}$

A ortonormal ty $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$

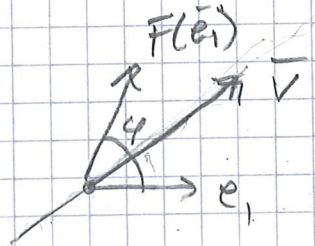
och $\frac{1}{5} \sqrt{4^2 + 3^2} = 1$

Så F isometri

$\det A = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = -1$

Så F är en spegling

Obs $\begin{cases} \cos \varphi = \frac{4}{5} \\ \sin \varphi = \frac{3}{5} \end{cases}$



Kann användas för att hitta φ .

Alt: Om $\vec{n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ligger på linjen

så $F(\vec{n}) = \vec{n}$

dvs $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 5x_1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 5x_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$

normalvektor för linjen

$n = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ riktning

Sats: $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ isometri, $F(\bar{x}) = \underline{e} A \bar{x}$

Om $\det A = 1$ är F en rotation

Om $\det A = -1$ är F antingen en spegling eller en rotation följt av en spegling i ett plan (kallas vridspegling.)

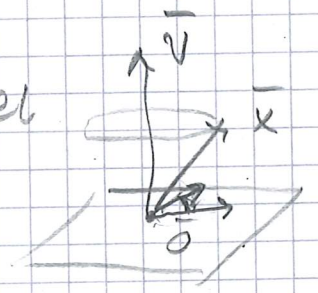
Ex:
$$F(\bar{x}) = \underline{e} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \bar{x}$$

F är en isometri (kol. bilda ON-bas)

$\det A = 1$ så rotation

$F(\bar{n}) = \bar{n}$ ger rotationsaxel

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$



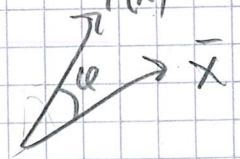
$\Leftrightarrow \bar{n} = \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Planet $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$

har $\bar{n}$ som normal.

För φ : Tag $\bar{x}$ i planet, t.ex. $\bar{x} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Då är $|\bar{x}| = \sqrt{5}$, och $F(\bar{x}) = \underline{e} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ med $F(\bar{x})$

$|F(\bar{x})| = \sqrt{5}$. Vinkeln fås via



$$\bar{x} \cdot F(\bar{x}) = |\bar{x}| |F(\bar{x})| \cos \varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{-5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \Leftrightarrow \cos \varphi = -1$$

Så rot. vinkeln är $\varphi = \pi$ ($= 180^\circ$).