

Föreläsning 14

(1)

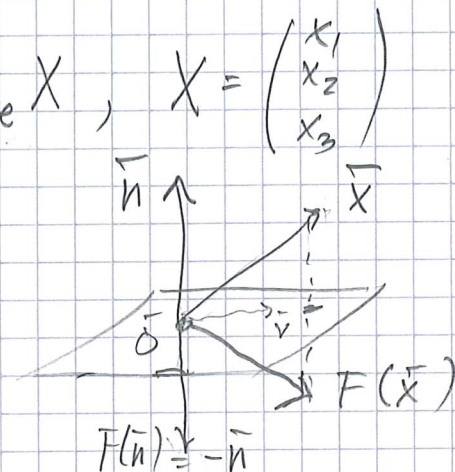
Ex: $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spegling i planet

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$F(\bar{x}) = F(\underline{e} X) = \underline{e} A_e X, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Normal till planet

$$\bar{n} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



har egenskapen $F(\bar{n}) = -\bar{n}$

Alla vektorer $\bar{v}$, parallella med planet uppfyller $F(\bar{v}) = \bar{v}$.

Ng bas

$\bar{f}_1 = \bar{n}$, $\bar{f}_2, \bar{f}_3$ par. med planet
(t.ex. $\bar{f}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_3 = \underline{e} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$)

ger

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_e = T A_f T^{-1}$$

$$F(\bar{f}_1) \quad F(\bar{f}_2) \quad F(\bar{f}_3)$$

där

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

basbytmatrisen

$$\bar{f}_1 \quad \bar{f}_2 \quad \bar{f}_3$$

Definition

Antag $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är en

linjär avb. Talet λ kallas

ett egenvärde till F om

det finns en vektor $\vec{u} \neq \vec{0}$

så att $F(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$, $\vec{u}$ kallas

då en egenvektor till F

 $F(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ (par. med $\vec{u}$)

Obs: $\vec{0}$ är aldrig en egenvektor,
 $F(\vec{0}) = 14 \cdot \vec{0} = 15 \cdot \vec{0}$

EX

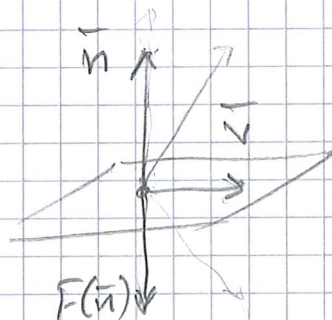
För speglingen σ ex

är $\vec{n}$ (och alla

vektorer par. med $\vec{n}$)

en egenvektor med

egenvärde -1 : $F(\vec{n}) = -1 \cdot \vec{n}$



och alla vektorer $\vec{v}$ i planet

är egenvektorer med egenvärdet

$$F(\vec{v}) = 1 \cdot \vec{v}$$

Alla egenvektorer med samma
egenvärde λ bildar, tillsammans
med $\vec{0}$ ett underutrum kallat
egenrummet till λ , t.y.

om $\vec{u}, \vec{v}$ har egenvärde λ ,

$$\begin{aligned} \text{är} \quad F(\vec{u} + \vec{v}) &= F(\vec{u}) + F(\vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v} \\ &= \lambda (\vec{u} + \vec{v}) \quad (\text{därför } \vec{u} + \vec{v} \text{ är en} \\ &\quad \text{egenvektor med} \\ &\quad \text{egenvärde } \lambda) \end{aligned}$$

$$\text{och} \quad F(t\vec{u}) = tF(\vec{u}) = t\lambda \vec{u} = \lambda(t\vec{u})$$

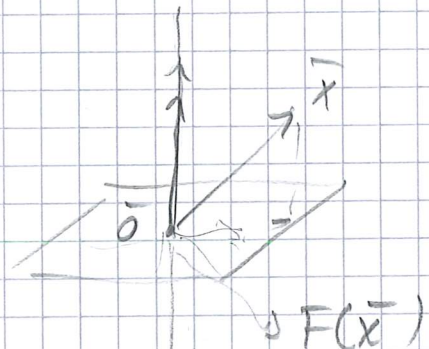
för $t \in \mathbb{R}$.

I speglingsexemplet

$$\text{är linjen } [\vec{n}] = [\vec{f}_1]$$

egenrum till $\lambda = -1$

och planet $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ dvs $[\vec{f}_2, \vec{f}_3]$
egenrum till $\lambda = 1$.



Ex: Antag

$$F(\bar{x}) = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \bar{x}$$

$$\bar{x} = \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ giv } F(\bar{x}) = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{e} \begin{pmatrix} 12 \\ 30 \end{pmatrix} = 6 \cdot \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 6\bar{x}$$

Se $\underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ är en egenvektor
med egenvärde 6

$$\bar{x} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ giv } F(\bar{x}) = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{e} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se $\underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ har egenvärde -1

$$\bar{x} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ giv } F(\bar{x}) = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ej egenvektor

Finns fler egenvärden?

(5)

Antag $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linjär avb.

och att $\bar{x}$ är en egenvektor till F med egenvärde λ ,

dvs

$$F(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$$

$$\text{Då är } F(\bar{x}) = \lambda \bar{x} \Leftrightarrow \underline{e} A X = \underline{e} \lambda X$$

$$\Leftrightarrow A X = \lambda X \Leftrightarrow A X - \lambda X = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I) X = 0 \quad \left(\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right)$$

Ekv. systemet har lös

$$X \neq 0 \Leftrightarrow A - \lambda I \text{ ej är inv. bar}$$

(dvs parametr. lös)

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

so alla egenvärden uppfyller denna ekv, kallas sekulärekv.

Ex $F(\bar{x}) = \underline{e} A X = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} X$

Egenvärden:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(4-\lambda) - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ el } \lambda = 6$$

Så F har endast egenvärdena 5
 -1 och 6 . Vad är egenvektorerna?

Egenvektorerna är lösna till ekvsystem

$$(A - \lambda I)X = 0 \text{ dvs } \left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 5 & 4-\lambda & 0 \end{array} \right)$$

$\lambda = 6$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -5 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \\ t \neq 0$$

dvs alla egenvektorer
 med egenvärde 6 är $t \in \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, t \neq 0$
 Egenrummet är linjen
 $-5x_1 + 2x_2 = 0$

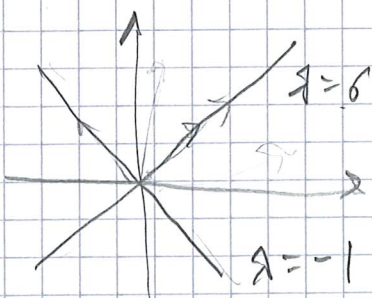
$\lambda = -1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \end{cases}, t \neq 0$$

så alla egenvekt med egenv. -1
 är $t \in \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0$

Egenrum $x_1 + x_2 = 0$



Ex: $F(\vec{x}) = \underline{A}\vec{x}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestäm egenvärden och egenvektorer

Lös: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 6-\lambda & 6-\lambda & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 3 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda(-2-\lambda)(6-\lambda) = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 0, -2 \text{ el } 6$

Egenvektorer

$\lambda = -2$: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & | & 0 \\ 2 & 4 & 2 & | & 0 \\ 3 & 2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases}$

egenvekt $t \underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$, $t \neq 0$

$\lambda = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 2 & 2 & 2 & | & 0 \\ 3 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = t \end{cases}$

egenvekt $t \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$, $t \neq 0$

$\lambda = 6$: $t \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$, $t \neq 0$

Alt:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + 12 + 12 - 9(2-\lambda) - 4(1-\lambda) - 4(1-\lambda) = 0$$

$$\dots \Leftrightarrow -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 12\lambda = 0$$

$$\text{faktorisera} \quad \lambda^3 - 4\lambda^2 - 12\lambda$$

$$\text{gissa rot} \quad \lambda = -2 \text{ ok}$$

$$\text{Då är } \lambda - (-2) = \lambda + 2 \text{ en faktor}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} \lambda^2 - 6\lambda \\ \lambda^3 - 4\lambda^2 - 12\lambda \quad \lambda + 2 \\ \hline -(\lambda^3 + 2\lambda^2) \\ \hline -6\lambda^2 - 12\lambda \\ -(-6\lambda^2 - 12\lambda) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{Så} \quad \lambda^3 - 4\lambda^2 - 12\lambda = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 6\lambda)$$

$$= (\lambda + 2)(\lambda - 6)\lambda$$

$$\text{egenv. } -2, 6, 0$$

Obs att

8

$$\bar{f}_1 = e \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{f}_2 = e \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{f}_3 = e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

är parvis ortog $\Rightarrow$ bildar en bas
för $\mathbb{R}^3$. (kan normeras till ON-bas)
Eftersom

$$F(\bar{f}_1) = -2\bar{f}_1, F(\bar{f}_2) = 0 \cdot \bar{f}_2,$$

$$F(\bar{f}_3) = 6 \cdot \bar{f}_3, \text{ blir}$$

$$A_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \leftarrow \text{diag. matris med egenv. på diagonalen.}$$

$$A_e = T A_f T^{-1}, \text{ där } T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{f}_1 \quad \bar{f}_2 \quad \bar{f}_3$

($T^{-1} = T^t$ om ON-bas)

Sats: $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linjär. Om $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ är egenvektorer med olika egenvärden, är de linjärt oberoende.

Speciellt: Om $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$ är egenvektorer till F med olika egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ är

$$A_e = T A_f T^{-1} \text{ med } T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \bar{f}_1 & \bar{f}_2 & \dots & \bar{f}_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$\text{och } A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

F säges vara diagonaliserbar
om A_f är diagonal i någon bas.

Spektralsatsen: $F(X) = \lambda AX$ linjär

F är symmetrisk ($\Leftrightarrow A^t = A$)

$\Leftrightarrow$ det finns en ON-bas av
egenvektorer

EX ovan $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

EX:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

symmetrisk.

Diagonalisera A .

Egenvärden $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (-1) & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & -1 \\ \lambda & -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda(3-\lambda)^2 = 0$
 $\lambda = 0$ el $\lambda = 3$ (dubbel)

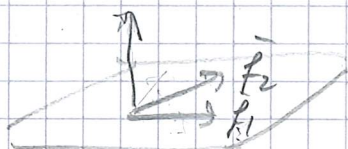
Egenvektorer

$\lambda = 3$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & | & 0 \\ -1 & -1 & -1 & | & 0 \\ -1 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \text{(planet i} \\ \text{egenrum} \end{cases}$

(10)

Bas för planet fås ur

$$\begin{cases} x_1 = -s - t \\ x_2 = s \quad 0 \\ x_3 = \quad t \end{cases}, \text{ tex } \bar{u}_1 = e \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$



$$\bar{u}_2 = e \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obs ej ON-bas

$\lambda = 0$ ger egenvekt $t e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$

(värna el. konstatera att normalen till planet är ort. mot $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ och är egenvekt, evl. spektralsatsen).

En $\bar{u}_3 = e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ som bas för egenrummet

I basen $\underline{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$, $T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

blir

$$A_u = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obs ON-bas av egenvekt (A symmetrisk)

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{från } \bar{u}_1)$$

$$\bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \bar{f}_2 = \bar{f}_3 \times \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} e \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ex

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

(11)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 25 & 26 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 61 & 62 \\ 155 & 154 \end{pmatrix} = A^2 \cdot A$$

$$A^{100} = ?$$

Om $A = T D T^{-1}$, där $A_f = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} (=A_f)$

Är $A^{100} = (T D T^{-1})^{100} = \dots$ $D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$

$$= (T D T^{-1}) (T D T^{-1}) (T D T^{-1}) \dots (T D T^{-1})$$

$$= T D^{100} T^{-1} = T \begin{pmatrix} \lambda_1^{100} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{100} \end{pmatrix} T^{-1}$$

A har egenvärde 6 med $\underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

och egenvärde -1 med $\underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Se $A^{100} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^{100} & 0 \\ 0 & (-1)^{100} \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

$$= \dots = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \cdot 6^{100} + 5 & 2 \cdot 6^{100} - 2 \\ 5 \cdot 6^{100} - 5 & 5 \cdot 6^{100} + 2 \end{pmatrix}$$