

Föreläsning 15

1

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funktion (av flera variabler)

$$f(\bar{x}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y \in \mathbb{R}$$

Ex

$$f(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4$$

linjär form

obs f är en linjär avb.

(alla termer
av grad 1)

$$= \underset{\substack{A \\ \cdot \\ X}}{(1 \ 2 \ 3 \ 4)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Def:

En kvadratisk form Q är en

funktion $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ som kan
skrivas

$$Q(\bar{x}) = Q(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{nn}x_n^2, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

dvs som en summa av termer av
grad 2.

Ex: $Q(\bar{x}) = Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$

egenskap: $Q(\bar{x}) > 0$ då $\bar{x} \neq \vec{0}$

Ex: $Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_2^2$ är ≤ 0 ,

och kan vara $= 0$ utan att $\bar{x} = \vec{0}$

tex $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$

Ex $Q(x_1, x_2) = x_1 x_2$

$$Q(1, -1) < 0$$

$$Q(1, 1) > 0$$

$$Q(1, 0) = 0$$

Ex: $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2$

$$= (x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

t.ex $Q(1, 1) = 0$

Ex $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1 x_2 + 2x_2^2$

skriv

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 x_2 - 2x_2 x_1 + 2x_2^2$$

$$= x_1(x_1 - 2x_2) + x_2(-2x_1 + 2x_2)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= X^T A X = \underline{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \underline{e} A X$$

$$= \bar{X} \circ F(\bar{X}), \quad \text{där } F \text{ är}$$

en symmetrisk linjär

arb. med arb. matris $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Alltså:

Till

Allm: Till varje kv. form $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

finns en symmetrisk linjär

avb. $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ så att

$$Q(\bar{x}) = \bar{x} \cdot F(\bar{x})$$

Ex

$$Q(\bar{x}) = Q(x_1, x_2, x_3)$$

$$= x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 20x_2x_3 - x_3^2 + 2x_1x_3$$

$$= x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 2x_2^2 + x_1x_3 + x_3x_1 - 10x_2x_3 - 10x_3x_2 - x_3^2$$

↑ ↑
med kolonn

$$= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -10 \\ 1 & -10 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \bar{x}^t A \bar{x}$$

Avbildningen $F(\bar{x}) = A\bar{x}$ ger $Q(\bar{x}) = \bar{x} \cdot F(\bar{x})$

F är symmetrisk ($A^t = A$) så enligt

spektralsatsen finns en ON-bas av

eigenvektorer $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$,

så att $A_e = T A_f T^{-1}$, där $A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

och $T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{f}_1 & \bar{f}_2 & \bar{f}_3 \end{pmatrix}$.

Obs att T är ortogonal, så

$T^{-1} = T^t$. Efter bytning till

$\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ är $X = TY$ där $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

är koord. för $\bar{X}$ i den nya basen,

och $A_e = T A_f T^{-1} = T A_f T^t$.

$$\text{Så } Q(\bar{X}) = Q(XX^t) = X^t A_e X$$

$$= (TY)^t A_e TY = Y^t T^t A_e TY$$

$$= Y^t T^t (T A_f T^t) TY$$

$$= Y^t T^{-1} T A_f T^{-1} TY = Y^t A_f Y$$

$$= (y_1 y_2 y_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 \quad (\text{endast kvadrater})$$

EX

5

$$Q(\bar{x}) = Q(x_1, x_2, x_3)$$

$$= x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{rad} & \text{kol} \end{matrix}$

Matris

$$A_e = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi bygger till en ON-bas av egenvektorer

Ent. ex på förra föreläsning:

Eigenvärden $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 0$

ON-bas av egenvektorer

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

resp.

Så basbyte ger

$$Q(\bar{x}) = Q(\begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \end{pmatrix} X) = Q(\begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \end{pmatrix} Y)$$

$$= Q(y_1, y_2, y_3) = 6y_1^2 - 2y_2^2 + 0y_3^2$$
$$= 6y_1^2 - 2y_2^2$$

(6)

Definition : (teckenkaraktär)Antag $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är en kvadratisk form Q säges varapositivt definit om $Q(\bar{x}) > 0$ för alla $\bar{x} \neq \bar{0}$ positivt semidefinit om $Q(\bar{x}) \geq 0$ för alla $\bar{x} \neq \bar{0}$.negativt definit om $Q(\bar{x}) < 0$ för alla $\bar{x} \neq \bar{0}$ negativt semidefinit om $Q(\bar{x}) \leq 0$ för alla $\bar{x} \neq \bar{0}$.indefinit annars (båda tecken antas)Ex: $\mathbb{R}^3$, $Q(x_1, x_2, x_3)$

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 > 0 \quad \text{då} \quad \bar{x} \neq \bar{0} \Rightarrow Q \text{ pos. def.}$$

$$x_1^2 + 2x_2^2 \geq 0, \quad \text{t.ex.} \quad Q(0, 0, 1) = 0$$

så pos. semidef.

$$6x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_3$$

$$Q(1, 0, 0) > 0$$

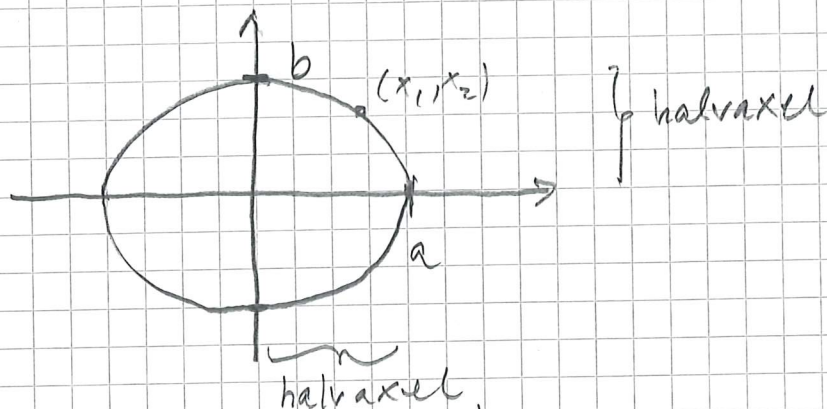
$$Q(0, 1, 0) < 0$$

så indefinit.

Andragsgradskurvor

7

$\mathbb{R}^2$



Ellips

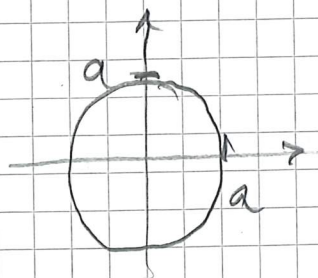
Alla punkter (x_1, x_2) i planet $(\mathbb{R}^2)$ som uppfyller en ekvation av typen

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

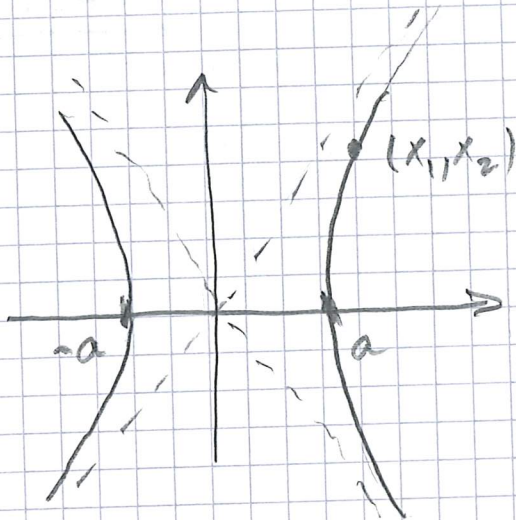
bildar en ellips med halvaxlarna a och b .

Obs att då $a = b$ får en cirkel med radii a !

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 = a^2$$



Ellipsen beskrivs av en pos. def. form.

$\mathbb{R}^2$ 

Hyperbel

Alla punkter i planet som uppfyller

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

bildar en hyperbel som skär x_1 -axeln vid $x_1 = a$. Kurvan har asymptoter linjerna $x_2 = \pm \frac{b}{a} x_1$ då $x_1 \rightarrow \pm \infty$

Hyperbeln bestäms av en indefinit kvadr. form.

(Se boken för utvärtningsfall)

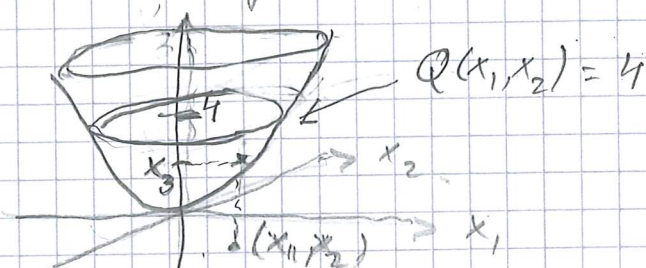
(9)

Ex $Q(\bar{x}) = Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$

Beskriv kurvan $Q(x_1, x_2) = 4$,

dvs $2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 4$

Bild: $x_3 = Q(x_1, x_2)$ är en yta i $\mathbb{R}^3$



Sätter man $x_3 = 4$ får man
Skärningskurvan vid höjden 4

Matris för Q : $A_e = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Eigenvärden

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ el } 3$$

Egenvektorer

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ ger $t \in \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0$

$\lambda = 3$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ ger $t \in \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \neq 0$

ON-bas av egenvektorer

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

I denna fas blir

(10)

$$Q(y_1, y_2) = 1 \cdot y_1^2 + 3y_2^2$$

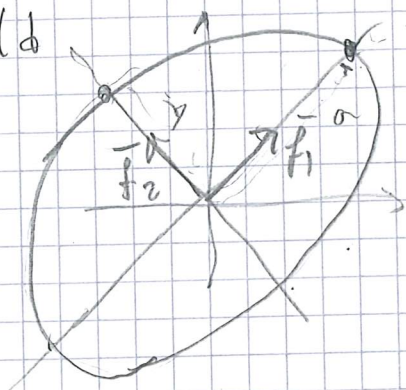
Så ekv blir

$$y_1^2 + 3y_2^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{y_1^2}{4} + \frac{3y_2^2}{4} = 1$$

dvs $\frac{y_1^2}{2^2} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$, (jmf $\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$)

Och visar att kurvan är en ellips
med halvaxlar $a = 2$, $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Bild



Största avst till origo
är 2 och finns
i punkterna

$$\pm 2\vec{f}_1 = \pm 2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dvs $\pm \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}} \right)$

Minsta avst i $\pm \frac{2}{\sqrt{3}} \vec{f}_2$,

dvs $\pm \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}} \right)$.