

Föreläsning 16

1

$Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratisk form

Ex: $Q(\bar{u}) = Q(\underline{e} X)$

$$= Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + x_1x_2 - 2x_2x_3$$

(alla termer av grad 2)

↑
rad ↑
 column

$$= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= X^t A X = \underline{e} X \circ \underline{e} A X = \bar{u} \circ F(\bar{u})$$

A symmetrisk $\Rightarrow$ det finns en
ON-bas $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ av egenvektorer
med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ resp.

(enligt spektralsatsen)

Obs Basen är högerorienterad
om $\bar{f}_3 = \bar{f}_1 \times \bar{f}_2$.

I en sådan bas är

$$A_e = T A_f T^{-1}, \quad \text{där} \quad A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

vilket ger

$$Q(\bar{u}) = Q(\underline{e} Y) = Q(y_1, y_2, y_3) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$$

Andragsgradslykor

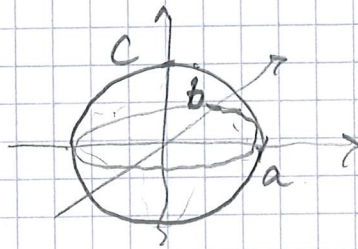
2

$Q(\vec{u}) = \text{konstant}$

Ellipsoid

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

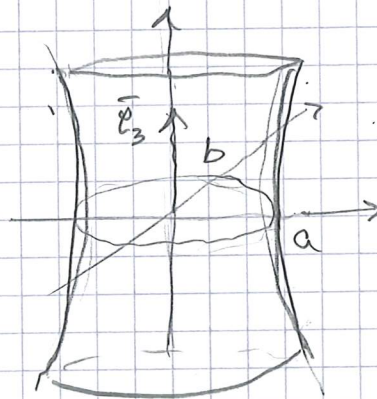
(alla egenvärden > 0)



Hyperboloid

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

(ett egenvärde < 0
två > 0)

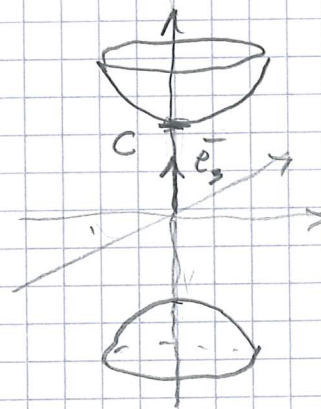


rotaxel
neg.
egenvärde

Träsmantlad hyperboloid

$$-\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

(två egenv. < 0
ett > 0)

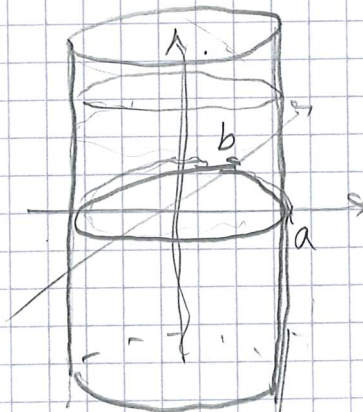


rotaxel
pos egenv.

Elliptiskt rör

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

(ett egenv. $= 0$
två > 0)



För fler,
(Se även boken)

Ex:

3

$$Q(\vec{x}) = Q(x_1, x_2, x_3)$$

$$= 3x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_3^2 - 10x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

Beschreib $Q(\vec{x}) = 1$.

Matrix

$$A_e = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Diagonalisiere A

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 & -2 \\ -5 & 3-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 & -2 \\ -2-\lambda & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 & -2 \\ 0 & 8-\lambda & 4 \\ 0 & 2 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 8-\lambda & 4 \\ 2 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\uparrow$
unv.

$$\Leftrightarrow (-2-\lambda) ((8-\lambda)(10-\lambda) - 4 \cdot 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2-\lambda) (\lambda-6)(\lambda-12) = 0$$

Eigenwörter $\lambda = -2, 6, 12$.

ON-basis an eigenwörtern:

$$\underline{\lambda = -2} \text{ zu } \vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\lambda = 6} \text{ zu } \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda = 12} \text{ zu } \vec{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{f}_1 \times \vec{f}_2 \text{ 3te} \\ \text{normiert.}$$

I denna bas blir

$$Q(\bar{u}) = Q(y_1, y_2, y_3)$$

$$= -2y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_3^2$$

$Q(\bar{u}) = 1$ ger efter omskrivning

$$-\frac{y_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} + \frac{y_3^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)^2} = 1$$

Så en hyperboloid

runt f_1 -axeln

med ett elliptiskt

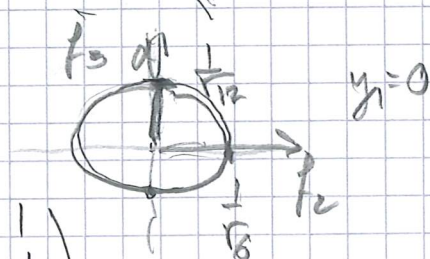
fränsnitt

Närmast origo ligger

punkterna

$$\pm \frac{1}{\sqrt{12}} \bar{f}_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} e \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{dvs} \quad \pm \frac{1}{6\sqrt{2}} (1, -1, -2) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

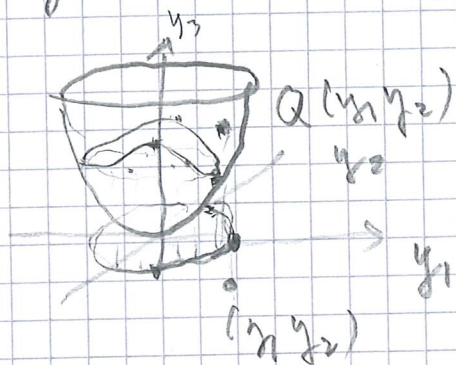


Ex

(5)

$$Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Antag $Q(\bar{u}) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 9y_1^2 + 12y_2^2$



Antag att

$$|\bar{u}|^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1$$

Vad är största/minsta
värdet av $Q(\bar{u})$?

Obs att

$$\begin{aligned} Q &= 9y_1^2 + 12y_2^2 \leq 12y_1^2 + 12y_2^2 \\ &= 12(y_1^2 + y_2^2) = 12 \end{aligned}$$

och största
värdet 12 antas då $(y_1, y_2) = (0, 1)$

dvs i punkten som $\vec{f}_2$ pekar på

På samma sätt

$$\begin{aligned} Q &= 9y_1^2 + 12y_2^2 \geq 9y_1^2 + 9y_2^2 \\ &= 9(y_1^2 + y_2^2) = 9 \end{aligned}$$

och minsta värdet 9 antas
i punkten $\vec{f}_1$ pekar på. $(y_1, y_2) = (1, 0)$

Allmänt: $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda_{\min}$ minsta egenvärde
 $\lambda_{\max}$ största

$$\lambda_{\min} |\bar{u}|^2 \leq Q(\bar{u}) \leq \lambda_{\max} |\bar{u}|^2.$$

(6)

System av differentialekv.

(linjära 1:a ordn, homogena)

 t variabel $x(t)$ funktion av t Ex differ

$$x'(t) = 4x(t) + \overline{x(t) + 1}$$

Finn funktion $x(t)$ Ex

$$x'(t) = x(t)$$

en lös

$$x(t) = e^t$$



Även

$$x(t) = 2e^t \text{ har } x'(t) = 2e^t$$

Allmänt

$$x'(t) = \lambda x(t)$$

har allm. lös $x(t) = C \cdot e^{\lambda t}$

$$x' = C \cdot \lambda e^{\lambda t}$$

där C är en
(reell) konstantEx

$$x'(t) = 2x(t)$$

Skriv $x' = 2x$

$$\text{Lös } x = C e^{2t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

System: $x_1(t), x_2(t)$ sökas

(7)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) - 7x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - 5x_2(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow X' = AX$$

Basbyte gör

$$X = TY \text{ och } X' = TY'$$

$$\Rightarrow T^{-1}X = Y \text{ och } T^{-1}X' = Y'$$

$$\text{Så } X' = A_e X \Rightarrow TY' = A_e T Y \Rightarrow Y' = \underbrace{T^{-1}A_e T}_{A_f} Y$$

Den nya basen är en bas av
egenvektorer är

$$A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

vilket gör

$$Y' = A_f Y \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases} \text{ med lös } \begin{cases} y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Gå tillbaka till urspr. basen.

$$\text{med } X = TY$$

$$\text{Så } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

Ex $A_e = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

har egenvärden $-3, 2$
med motsv. bas. vektorer

$$\bar{f}_1 = e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{f}_2 = e \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$X = T Y$ ges nu

$$e \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} y_1 + 7y_2 \\ y_1 + 2y_2 \end{pmatrix}$$

$\bar{f}_1 \quad \bar{f}_2$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = y_1 e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y_2 e \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = C_1 e^{-3t} e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} e \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\bar{f}_1 \quad \bar{f}_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{-3t} + 7C_2 e^{2t} \\ x_2(t) = C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^{2t} \end{cases}$$

$$\left(\text{Alla } e \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \bar{f}_1 + C_2 e^{2t} \bar{f}_2 \right)$$

Ex Ibland söker man lösna med
begynnelsevärden $\begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = -3 \end{cases}$

$$\Rightarrow (e^0 = 1) \begin{pmatrix} C_1 + 7C_2 \\ C_1 + 2C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -5 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Lösning:

$$\begin{cases} x_1(t) = -5 e^{-3t} + 7 e^{2t} \\ x_2(t) = -5 e^{-3t} + 2 e^{2t} \end{cases}$$