

Föreläsning 17

1

Differenslikvationer

Talföljd $(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_n)_{n=0}^{\infty} = (x_n)_{n \geq 0}$

Ex $x_n = n^2 + 4n, n \geq 0 \quad x_n = x(n)$

$$(x_n)_{n \geq 0} = (0, 1^2 + 4 \cdot 1, 2^2 + 4 \cdot 2, 3^2 + 4 \cdot 3, \dots) \\ = (0, 5, 12, 21, \dots)$$

$$x_{100} = 100^2 + 4 \cdot 100$$

Rekursivt definierad talföljd

$$\begin{cases} x_n = 4 \cdot x_{n-1}, & n \geq 1 \\ x_0 = 3 \end{cases} \quad (\text{startvärde})$$

$$x_1 = 4 \cdot x_0 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$x_2 = 4 \cdot x_1 = 4 \cdot 12 = 48$$

$$(x_n)_{n \geq 0} = (3, 12, 48, \dots)$$

Vad är x_{100} ?

$$x_n = 4 \cdot x_{n-1} = 4 \cdot (4 x_{n-2}) = 4^2 x_{n-2} = 4^2 (4 x_{n-3}) = \\ = \dots = 4^n x_0 = 4^n \cdot 3, \quad n \geq 1$$

Så

$$x_{100} = 3 \cdot 4^{100}$$

Allmänt $\begin{cases} x_n = \lambda x_{n-1}, \\ x_0 = C \end{cases}$ har lösning $x_n = C \lambda^n, n \geq 0.$

Linjärt system, två talföljderna $(x_n), (y_n)$: (2)

$$\begin{cases} x_n = 4x_{n-1} - 7y_{n-1} \\ y_n = 2x_{n-1} - 5y_{n-1} \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = X_0$$

(startvärden)

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1$$

Skriver $X_n = AX_{n-1} = A(AX_{n-2}) =$
 $= \dots = A^n X_0$

dvs $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Beräkna A^n (se Fö 14 del 4)

A har egenvärden $-3, 2$ med egenvektorer

$$\bar{f}_1 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{resp. ,}$$

Se om vi byter bas till $\bar{f}_1, \bar{f}_2$, blir

$$A_f = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

med $A = T A_f T^{-1}$, och

$$X_n = T A_f^n T^{-1} X_0, \quad \text{dvs}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

och vi får lösen

(3)

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 \cdot 2^{n+1} - (-3)^{n+2} \\ 2^{n+2} - (-3)^{n+2} \end{pmatrix}, \quad n \geq 0$$

T.ex. är

$$x_{100} = \frac{1}{5} (7 \cdot 2^{101} - 3^{102})$$

$$y_{100} = \frac{1}{5} (2^{102} - 3^{102})$$

Allmänt

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} T^{-1} X_0,$$

där $T = (\bar{f}_1 \quad \bar{f}_2)$, $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$,

$\bar{f}_1, \bar{f}_2$ egenvekt.

med egenvärden λ_1, λ_2 för A .

Ex:

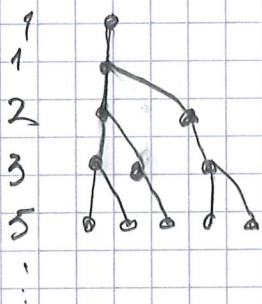
4

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + x_{n-2} & , n \geq 2 \\ x_0 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

ger $(x_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$
(Fibonacci 1200-talet)

x_n = Antal par av kaminer månad n

" Ett par som föds föder ett nytt par efter två månader och ett par varje månad därefter "



3a) a) a)

5

$$\begin{cases} x_n = y_{n-1} \\ y_n = x_{n-1} + y_{n-1} \end{cases}$$

dvs

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X_n = A X_{n-1} = A^n X_0 = T A_f^n T^{-1} X_0$$

A har egenvärden

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = g \quad \sim 1,618...$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{g} \quad (g^2 = g+1)$$

och

$$T = \begin{pmatrix} 1 & g \\ g & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{g\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & g \\ g & -1 \end{pmatrix}$$

Detta ger

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{g\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & g \\ g & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{g}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g \\ g & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och slutligen

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(g^{n+1} - \left(-\frac{1}{g}\right)^{n+1} \right) \approx \frac{g^{n+1}}{\sqrt{5}} \quad (\text{store } n)$$