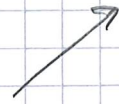


Föreläsning 2

1

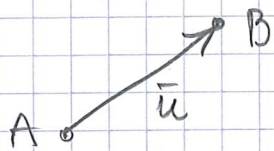
Vektorer



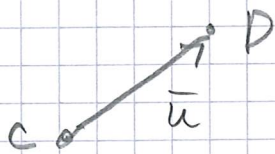
$$x^2 + x - 1,$$

$$\begin{matrix} 16 \\ \boxed{A} \\ 16, \dots \end{matrix}$$

En (geometrisk) vektor i planet (2-dim)
eller rummet (3-dim), $\vec{u}$ beskriver
en förflyttning från en punkt till en
annan. $\vec{u}$ är en riktad sträcka
med längd $|\vec{u}|$



$\vec{u}$ beskriver förflyttningen
från A till B.



$\vec{u} = \overline{AB}$ definierar $\vec{u}$

$\overline{CD} = \overline{AB} = \vec{u}$ om förflyttningen
från C till D är densamma som den
från A till B.

Specialfall

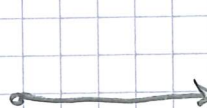
• A Nollvektorn $\vec{0} = \overline{AA}$

har längd $|\vec{0}| = 0$.

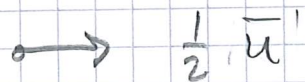
Definition: Om $t > 0$, reellt tal,

är $t\vec{u}$ en vektor som har
samma riktning som $\vec{u}$ och
längd $t|\vec{u}|$.

2


 $\vec{u}, |\vec{u}| = 2$


 $3\vec{u}, |3\vec{u}| = 3|\vec{u}|$
 $= 3 \cdot 2 = 6$


 $\frac{1}{2}\vec{u}$

Om $t < 0$ är $t\vec{u}$ en vektor med
 motsatt riktning mot $\vec{u}$, och
 längd $-t|\vec{u}|$.


 $\vec{u}, |\vec{u}| = 2$


 $-\vec{u}, |-\vec{u}| = |-1 \cdot \vec{u}| = 1 \cdot |\vec{u}| = 2$

Även $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

Obs att $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$) är en

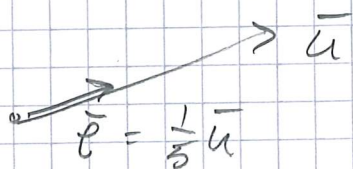
vektor av längd 1:

$$|\vec{e}| = \left| \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u} \right| = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot |\vec{u}| = 1 \quad \left(t = \frac{1}{|\vec{u}|} > 0 \right)$$

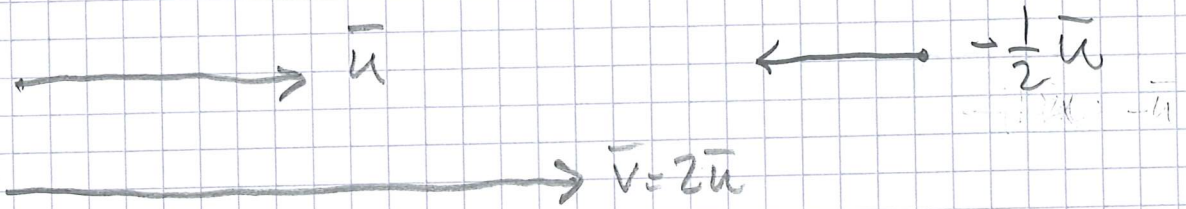
$\vec{e}$ är en enhetsvektor.

Ex Om $|\vec{u}| = 5$

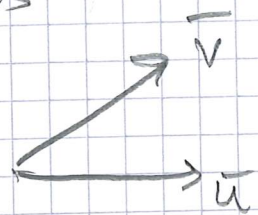
är $\vec{e} = \frac{1}{5} \vec{u}$ av längd 1


 $\vec{e} = \frac{1}{5} \vec{u}$

Def: $\vec{u}$ och $\vec{v}$ säges vara
parallella om $\vec{u} = t\vec{v}$
 för något $t \in \mathbb{R}$.



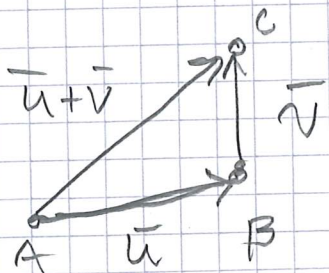
Ex: parallella vektorer kallas
linjärt oberoende



Def (Addition)

Låt $\vec{u}, \vec{v}$ vara vektorer (i planet
 eller rummet) så att

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \text{ och } \vec{v} = \overrightarrow{BC}$$

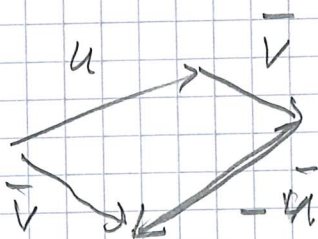


Då är

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

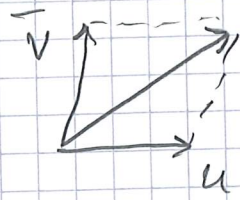
dvs "vektorer adderas genom
 att man lägger dem efter varandra"

Ex



$$\vec{u} + \vec{v} - \vec{u} = \vec{v}$$

Även



$\bar{u} + \bar{v}$ är diagonalen
i parallelogrammen
som $\bar{u}$ och $\bar{v}$ spänner
upp"

Klart att

$$\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$$

Se boken för $\bullet t(\bar{u} + \bar{v}) = t\bar{u} + t\bar{v}, t \in \mathbb{R}$

$$\bullet \bar{u} + \bar{v} = \bar{0}$$

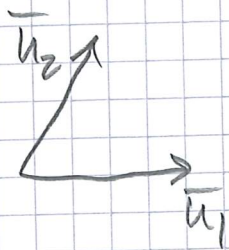
$$\Leftrightarrow \bar{u} = -\bar{v}$$

Räkna som med obekanta tal

$$\underline{\text{Ex}} \quad \frac{1}{2}\bar{u} + 2\bar{u} - \bar{u} = \left(\frac{1}{2} + 2 - 1\right)\bar{u} = \frac{3}{2}\bar{u}$$

Baser och koordinater

Antag $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$ är linjärt oberoende
(dvs ej parallella)



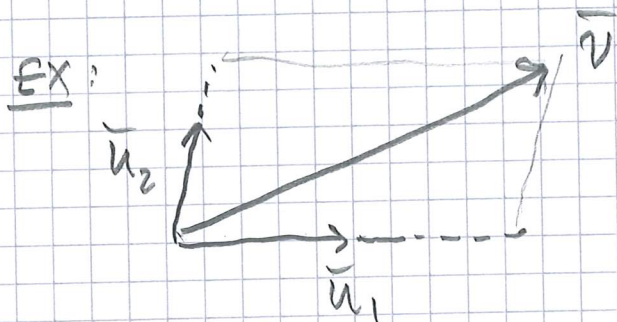
En linjärkombination

av $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$ är en

summa

$x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2$, där x_1, x_2 är reella
tal.

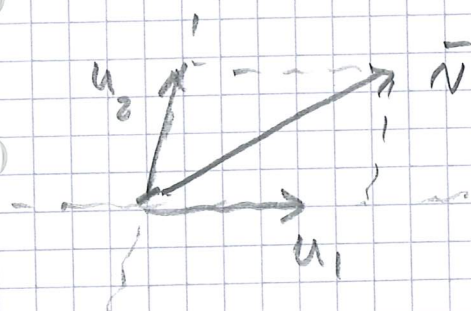
(5)



$$\vec{v} = 2\vec{u}_1 + \frac{3}{2}\vec{u}_2$$

Alla vektorer som ligger i planet kan skrivas som en linjärkombi.

av $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$.



$$\vec{v} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2$$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ är en bas för planet om $\vec{u}_1 \neq t\vec{u}_2$ (dvs ej parallella)

$\vec{v} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2$ säges ha koordinaterna

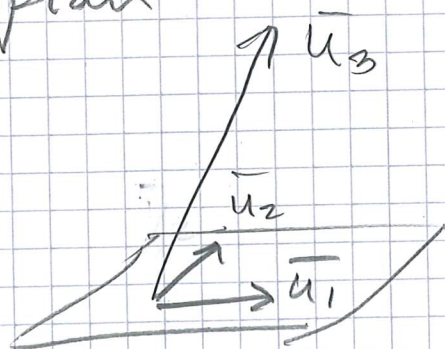
x_1 och x_2 i basen $\vec{u}_1, \vec{u}_2$.

I rummet:

Antag $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ ej parallella.

De ligger då i ett plan i rummet.

Tag $\vec{u}_3$ ej i detta plan.



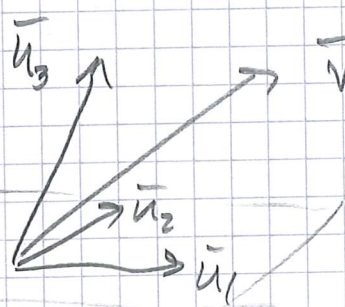
6

$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ säges vara linjärt

oberoende om de ej ligger i

samma plan i rummet, och

bildar en bas för rummet



(speciellt är

$$\bar{u}_3 \neq s\bar{u}_1 + t\bar{u}_2$$

för alla $s, t \in \mathbb{R}$)

Varje vektor $\bar{v}$ i rummet kan skrivas

$$\bar{v} = x_1 \bar{u}_1 + x_2 \bar{u}_2 + x_3 \bar{u}_3$$

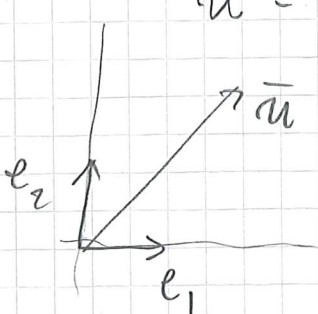
för några reella tal x_1, x_2, x_3

(koordinater),

$\bar{v}$ är en linjärkombination

av $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$.

Antag $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ basvektorer i planet (7)
 ($\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ i rummet). Vi skriver

$$\bar{u} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$


basen
 $\underline{e} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$

koordinat-
 matris

Ex: Låt $\bar{u} = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ej prunkten
 förflytt).

$$\bar{v} = 5\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Då $\bar{u}$

$$4\bar{u} = 4 \cdot (2\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = 8\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2$$

dvs

$$4 \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Även:

$$\begin{aligned} \bar{u} + \bar{v} &= 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 5\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 = \\ &= (2+5)\bar{e}_1 + (1-2)\bar{e}_2 = 7\bar{e}_1 - \bar{e}_2 \end{aligned}$$

Med

$$\underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{e} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 2+5 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

I rummet

$$\bar{u} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

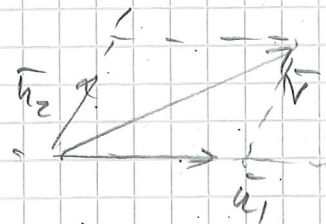
$$\bar{v} = \underline{e} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\bar{w} = 3\bar{u} + 2\bar{v} = 3\underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\underline{e} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{e} \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 \end{pmatrix} + \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 6 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 3+8 \\ 6+10 \\ 9+12 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 21 \end{pmatrix}$$

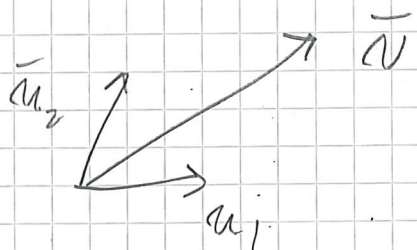
Ex:

Skriv $\bar{v} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ som en linjär kombination av



$$\bar{u}_1 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \bar{u}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Obs: $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ är ej parallella,
så bildar en bas för planet



$$x_1 \bar{u}_1 + x_2 \bar{u}_2 = \bar{v}$$

Vad är x_1, x_2 ?

Vi har

$$x_1 \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \underline{e} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underline{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \underline{e} \begin{pmatrix} 3x_2 \\ 4x_2 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow \underline{e} \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} (-1) \\ \text{ent.} \\ \text{entyd.} \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}, \text{ giv } \bar{v} = -2\bar{u}_1 + 1\bar{u}_2$$

$$\text{dvs } -2\underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{e} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Punkter i rummet har koord. $\bar{r}$ en basis

$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ relativt en fix punkt O (origo)

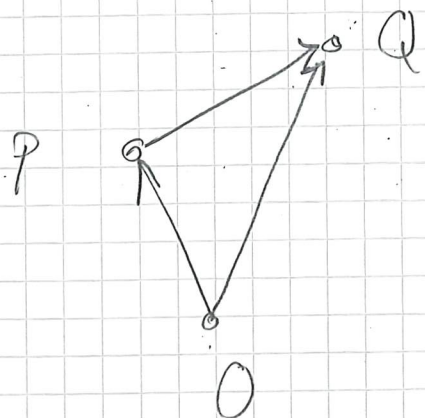
• P Def: Punkten P 's koord. $\bar{a}$ er samme som vektoren $\overrightarrow{OP}$ (ortsvektoren)

Dvs Om $\overrightarrow{OP} = \underline{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, er $P: (x_1, x_2, x_3)$

Ex

Vad är koord. för vektorn
mellan $P: (1, 2, 3)$ och

$Q: (4, 5, -6)$?



Vi observerar att

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$$

Så

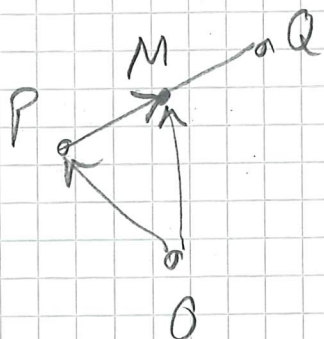
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

$$= \underline{e} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} - \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{e} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Ex

Mittpunkten på sträckan mellan
P och Q har koord.



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2} \overrightarrow{PQ} =$$

$$= \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \underline{e} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{e} \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{2} \\ 2 + \frac{3}{2} \\ 3 - \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

dvs $M: \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{3}{2} \right)$