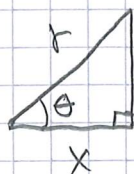


Föreläsning 3

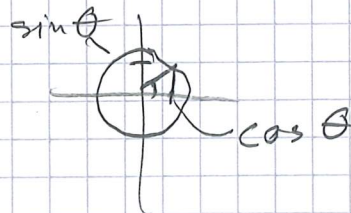
1

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

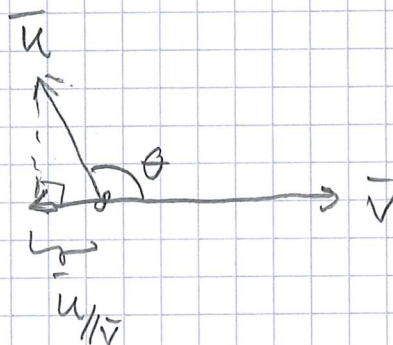
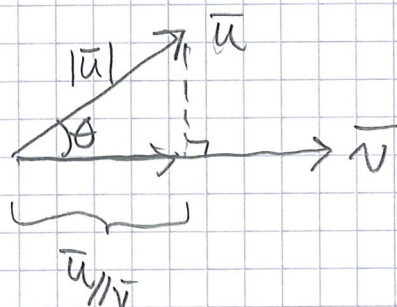
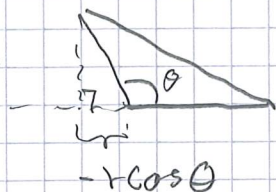


$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\text{dvs } x = r \cos \theta$$



$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

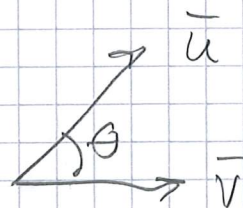


$u_{\parallel v}$ kallas den ortogonala projektionen av u på v , och har längden $|u_{\parallel v}| = \pm |u| \cos \theta$

Skalarprodukt

För vektorer i planet el. rummet definierar vi skalarprodukten

$$\text{som } u \cdot v = |u| |v| \cos \theta$$

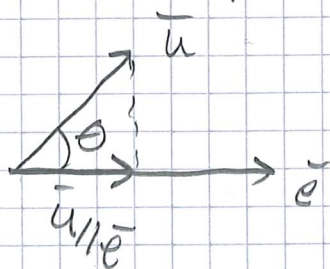


Obs reellt tal
Antag $\bar{e}$ är en enhetsvektor, dvs $|\bar{e}| = 1$

$$\text{Då är } u \cdot \bar{e} = |u| |\bar{e}| \cos \theta = |u| \cos \theta$$

Så att

$$u_{\parallel \bar{e}} = |u| \cos \theta \bar{e} = (u \cdot \bar{e}) \bar{e}$$



(2)

Räkneregler:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$$

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$$

$$t \cdot (\bar{u} \cdot \bar{v}) = (t\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot (t\bar{v})$$

för $t \in \mathbb{R}$.

(se boken för detaljer)

Ex

$$\begin{aligned} (\bar{u} + 2\bar{v}) \cdot (3\bar{u} + 4\bar{w}) &= \\ &= 3\bar{u} \cdot \bar{u} + 4\bar{u} \cdot \bar{w} + 6\bar{v} \cdot \bar{u} + 8\bar{v} \cdot \bar{w} \end{aligned}$$

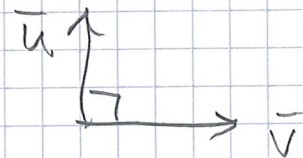
Speciellt:

$$\bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}| |\bar{u}| \underbrace{\cos 0}_{=1} = |\bar{u}|^2 \quad \longrightarrow \bar{u}$$

och om

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \bar{u} \cdot \bar{v} &= |\bar{u}| |\bar{v}| \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

 $\bar{u}$ och $\bar{v}$ säges då vara ortogonala

$$\begin{aligned} \text{Obs } \bar{u} \cdot \bar{v} > 0 &\Leftrightarrow 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ \bar{u} \cdot \bar{v} < 0 &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{aligned}$$

Ex

$$\text{Antag } |\bar{u}| = 2, \quad |\bar{v}| = 3$$

$$\text{och } \bar{u} \cdot \bar{v} = 4$$

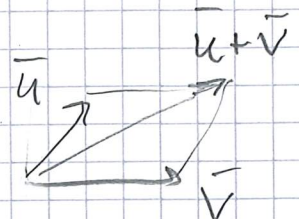
Då är

$$|\bar{u} + \bar{v}|^2 = (\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} + \bar{v})$$

$$= \bar{u} \cdot \bar{u} + \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \bar{u} + \bar{v} \cdot \bar{v} =$$

$$= |\bar{u}|^2 + 2\bar{u} \cdot \bar{v} + |\bar{v}|^2 = 2^2 + 2 \cdot 4 + 3^2$$

$$\text{Så } |\bar{u} + \bar{v}| = \sqrt{21} = 21$$

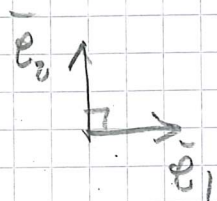


Behövs ett enkelt sätt att
räkna ut skalärprodukten.

(8)

Antag att $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ är en ON-bas
för planet, dvs (ortonormerad)

$$\begin{aligned}\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 &= 0 && \text{ortogonala} \\ |\bar{e}_1| &= |\bar{e}_2| = 1 && \text{normerade}\end{aligned}$$



Speciellt är

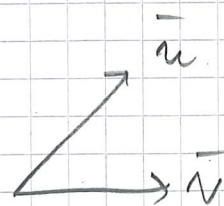
$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = |\bar{e}_1|^2 = 1$$

$$\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = |\bar{e}_2|^2 = 1$$

Sätt

$$\bar{u} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v} = y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$



Då är (enl. räknereglerna)

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = (x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2) \cdot (y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2)$$

$$= x_1 y_1 \underbrace{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1}_{=1} + x_1 y_2 \underbrace{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2}_{=0} + x_2 y_1 \underbrace{\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1}_{=0} + x_2 y_2 \underbrace{\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2}_{=1}$$

dvs

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

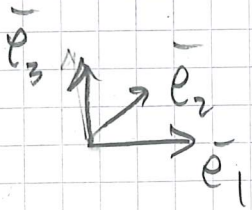
Med andra ord, i en ON-bas
gäller

$$\underline{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \underline{e} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Antag $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ ON-bas för rummet (4)

dvs $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0$ om $i \neq j$

och $|\bar{e}_i| = 1$ för alla i



Samma räkning gäller

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \underline{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \underline{e} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

dvs $\bar{u} \cdot \bar{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

Ex $\underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \underline{e} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-6)$
 $= 4 + 10 - 18 = -4$

Speciellt är

$$\bar{u} \cdot \bar{u} = \underline{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \underline{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Men $\bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2$ enligt tidigare,

så $|\bar{u}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

Ex $\bar{u} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ gäller $|\bar{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}$
 $= \sqrt{14}$

Även $\cos \theta = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}| |\bar{v}|}$ kan användas

för att beräkna vinkeln θ mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

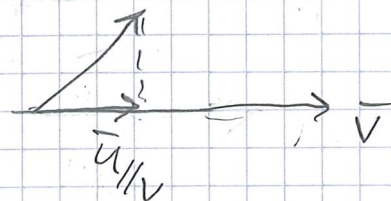
(5)

Ex:

Beräkna ortog. projektionen

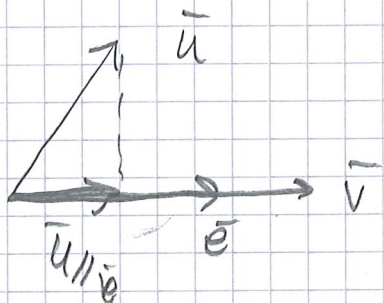
$$\text{av } \underline{u} = e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ på } \underline{v} = e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{u}$$

Vi ska först hitta en
formel för proj.



Sätt $\underline{e} = \frac{1}{|\underline{v}|} \underline{v}$, så att $|\underline{e}| = 1$

och $\underline{e}$ är parallell med $\underline{v}$



Enligt tidigare är

$$\begin{aligned} \underline{u}_{\parallel \underline{v}} &= \underline{u}_{\parallel \underline{e}} = (\underline{u} \cdot \underline{e}) \underline{e} \\ &= \left(\underline{u} \cdot \frac{1}{|\underline{v}|} \underline{v} \right) \frac{1}{|\underline{v}|} \underline{v}, \end{aligned}$$

dvs

$$\underline{u}_{\parallel \underline{v}} = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{v}|^2} \underline{v}$$

projektions-
formeln

Vi får

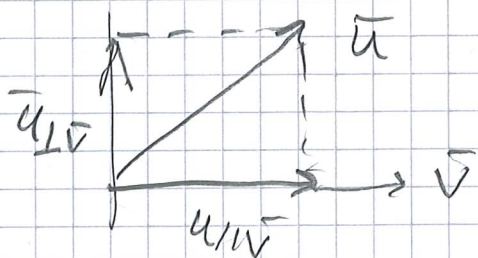
$$|\underline{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

och $\underline{u} \cdot \underline{v} = e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 + 1 - 1 = 1$

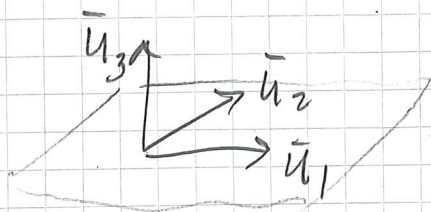
Så $\underline{u}_{\parallel \underline{v}} = \frac{1}{3} e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ är proj.

Obs att

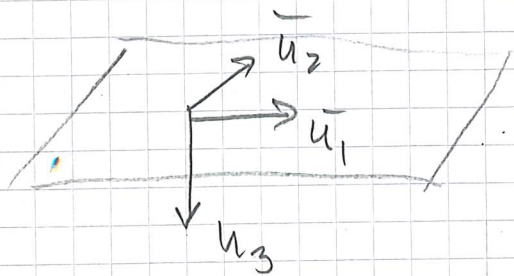
$$\underline{u}_{\perp \underline{v}} = \underline{u} - \underline{u}_{\parallel \underline{v}} \quad \text{är ortog. komplement}$$



$$\begin{aligned} \underline{u}_{\perp \underline{v}} &= e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} e \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$
högerorienterat
system



$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$
vänsterorienterat

Vektorprodukt

Existerar endast i rummet

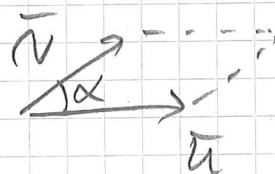
Def: $\bar{u}, \bar{v}$ vektorer i rummet

Vektorn $\bar{u} \times \bar{v}$ bestäms

av

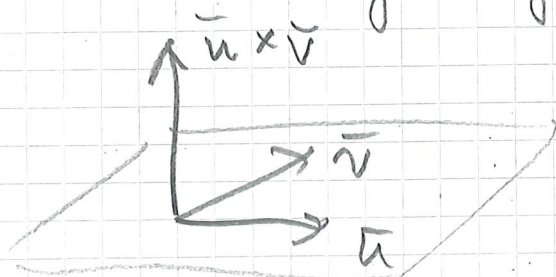
(i) $\bar{u} \times \bar{v}$ är ortog mot $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

(ii) $|\bar{u} \times \bar{v}|$ = arean av parallelogrammet som $\bar{u}$ och $\bar{v}$ spänner upp



$$= |\bar{u}| |\bar{v}| \sin \alpha$$

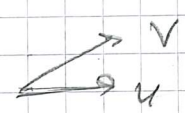
(iii) $\bar{u}, \bar{v}, \bar{u} \times \bar{v}$ bildar ett högersystem



Rekurrenzer:

(se boken)

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

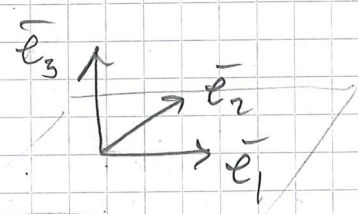


$$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

$$t(\vec{u} \times \vec{v}) = (t\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (t\vec{v})$$

Antag $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ är en ON-bas för rummet (högersystem)

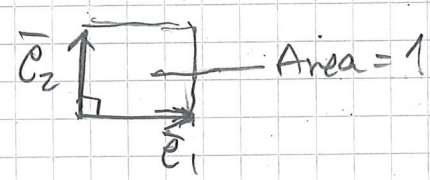


$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}, \dots$$



Låt $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) \times (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3)$$

$$= x_1y_1\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + x_1y_2\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + y_1y_3\vec{e}_1 \times \vec{e}_3$$

$$+ x_2y_1\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + \dots$$

$$= (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{e}_2$$

$$+ (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{e}_3$$

8

$$= \underline{e} \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

är ortog.
mot alla vektorer
i planet som
inneh $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

EX

$$\bar{u} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \underline{e} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \underline{e} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Kontroll

$$\underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \underline{e} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 + 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-3) = 0$$

$$\underline{e} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \underline{e} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

Obs

$$\underline{e} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = (-3) \cdot \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{så}$$

$\underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är också ort mot $\bar{u}$ och $\bar{v}$.