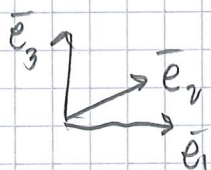
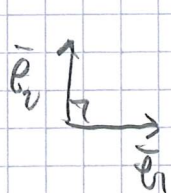


Föreläsning 4

1

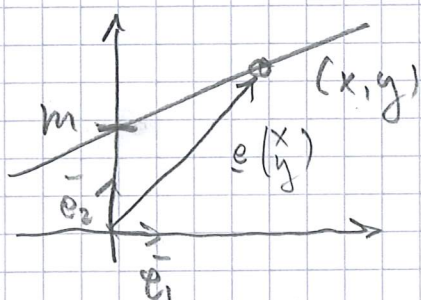
Högerorienterat ON-bas för planet/rummet antas



$$|e_i| = 1 \text{ för } i=1,2,3$$

$$e_i \cdot e_j = 0 \text{ för } i \neq j.$$

Linjer i planet



En linje är alla punkter (x, y) som uppfyller en

elevation $y = kx + m$

för några reella tal k, m .

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

riktningskoefficient.

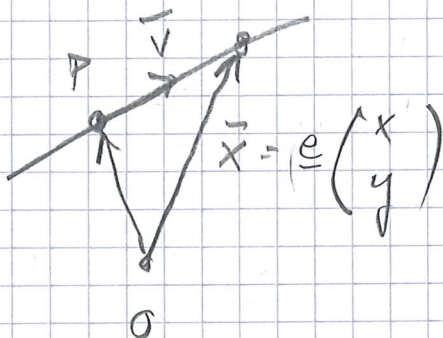
Obs

$$y - kx = m \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = m + kt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

är linjens ekv. på parameterform

Linje på vektorform



$P = (a, b)$ punkt på linjen

$$\vec{v} = \underline{e} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ riktningsvektor.}$$

$$\text{Varje vektor } \vec{x} = \underline{e} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

som pekar på en punkt (x, y)

på linjen kan då beskrivas

$$\vec{x} = \vec{OP} + t\vec{v} \text{ för något } t \in \mathbb{R},$$

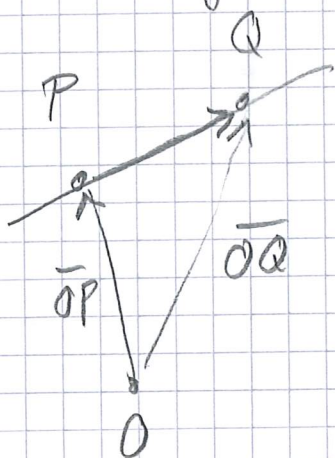
dvs

$$\underline{e} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \underline{e} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = a + ct \\ y = b + dt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ex

Ekv på param. form för linjen

genom $P: (2, 1)$ och $Q: (-3, 4)$.

En riktningsvektor är

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \underline{PQ} = \underline{OQ} - \underline{OP} \\ &= \underline{e} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \underline{e} \begin{pmatrix} -3-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Linjen: } \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \quad (\underline{x} = \underline{OP} + t \underline{v}) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Obs:Man kan eliminera t :

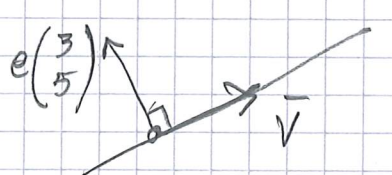
$$\begin{aligned} \downarrow \begin{cases} (3) & x = 2 - 5t \\ (5) & y = 1 + 3t \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 5t \\ 3x + 5y = 11 \end{cases} \quad \left(y = -\frac{3}{5}x + \frac{11}{5} \right) \end{aligned}$$

Ekvationen $3x + 5y = 11$ kallas
linjens ekvation på normal form
alt normalekvationen.

Vektorn $\underline{e} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ är ortogonal

(3)

mot linjens riktningsvektor $\underline{v} = \underline{e} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

 (så är en normalvektor till linjen)

Gäller allmänt:

Om $AX + BY = C$ är normalekv.
för en linje, är vektorn

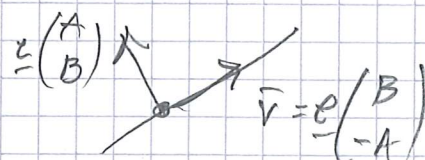
$\underline{e} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ ortog. mot riktn. vektorn $\underline{e} \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}$.

Ex

$$7x + 3y = 4$$

Normalvektor $\underline{e} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

riktn. vektor $\underline{e} \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$



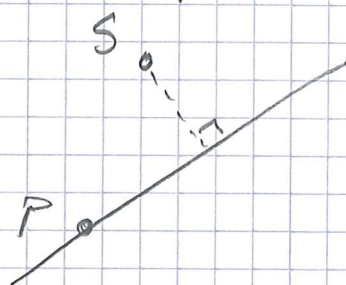
$$\text{ty } \underline{e} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \underline{e} \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = 7 \cdot 3 - 3 \cdot 7 = 0$$

Ex:

Vad är minsta avståndet från
punkten $S: (2, 3)$ till linjen
 $2x - y = 4$?

Normalvektor $\underline{n} = \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Riktn. vektor $\underline{v} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

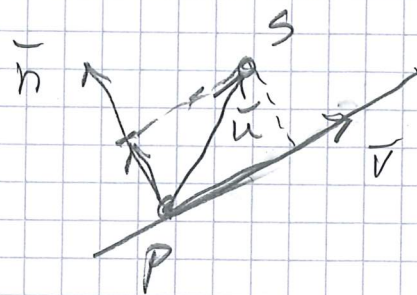


Punkt på linjen

t.ex. $P = (2, 0)$ (uppfyller ekv)

Lösning:

Bilda $\vec{u} = \vec{PS}$
Projicera $\vec{u}$ på $\vec{h}$
Det blir mest, $|\vec{u}_{\parallel \vec{h}}|$.



(4)

$$\vec{u} = \vec{PS} = \vec{OS} - \vec{OP} = \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Proj:

$$\vec{u}_{\parallel \vec{h}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{h}}{|\vec{h}|^2} \vec{h} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{2^2 + (-1)^2} \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{-3}{5} \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vi får $|\vec{u}_{\parallel \vec{h}}| = \frac{3}{5} \sqrt{2^2 + 1^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5} (= \frac{3}{\sqrt{5}})$

EX (forts)

Vilken punkt Q på linjen ligger närmast S?

Lösning:

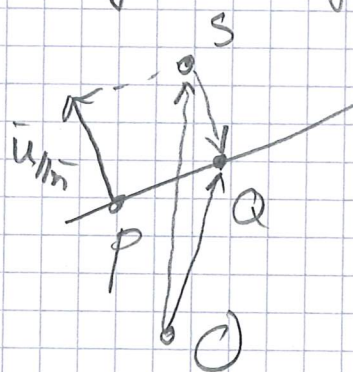
Vi ser att

$$\vec{OQ} = \vec{OS} - \vec{u}_{\parallel \vec{h}}$$

$$= \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{-3}{5} \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{e} \begin{pmatrix} 2 + \frac{6}{5} \\ 3 - \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

Svar $Q = \left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5} \right)$



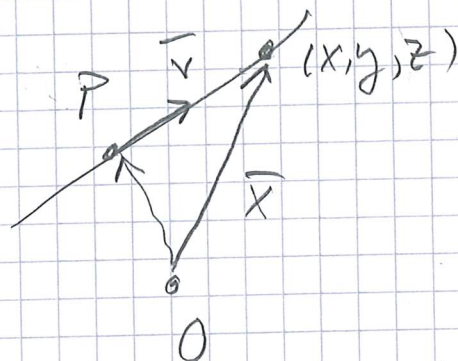
Linjen i rummet

Anges på parameterform (i regel)

Om $P = (a, b, c)$ är en punkt på linjen

och $\vec{v} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ är

en riktn.vektor, kan varje punkt (x, y, z) beskrivas



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{OP} + t\vec{v} \quad \text{för något } t \in \mathbb{R}.$$

dvs

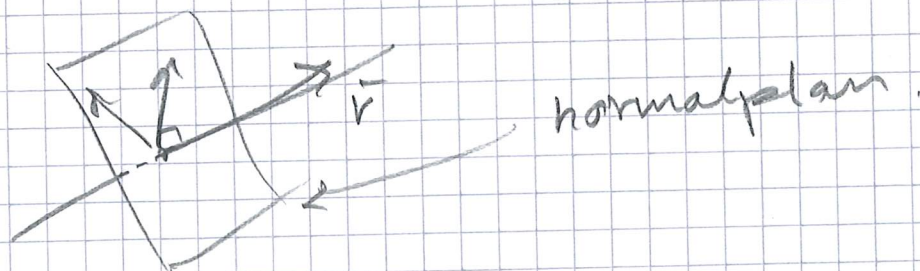
$$\begin{cases} x = a + dt \\ y = b + et \\ z = c + ft \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Ex

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + 2t \end{cases}, \text{ går genom}$$

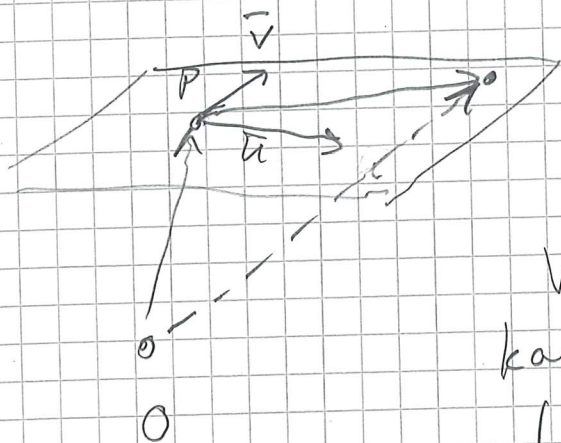
$$P = (1, 0, -2) \text{ \& riktn. } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Obs! finns oändl. många normalvektorer



Plan i rummet

6



Behövs en punkt P
i planet och två
(icke par.) riktningar $\vec{u}, \vec{v}$.

Varje punkt i planet
kan då skrivas

$$\underline{e} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

EX: $P: (1, 2, 3)$, $\vec{u} = \underline{e} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \underline{e} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

Plan i vektorform

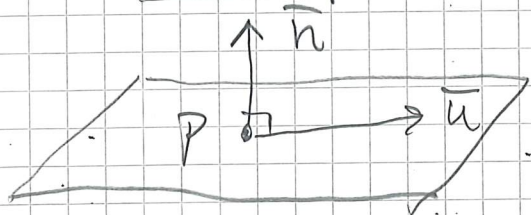
$$\underline{e} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \underline{e} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \underline{e} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Parameterform

$$\begin{cases} x = 1 + 4s + 7t \\ y = 2 + 5s + 8t \\ z = 3 + 6s + 9t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Plan i normalform

(7)



$P = (a, b, c)$ i planet

$\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ normalvektor,

drs $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ för alla $\vec{u}$ par. med planet.

Om (x, y, z) ligger i planet, är

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix}$$

parallell med planet, så

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Ax + By + Cz = D} \text{ för ngt } D.$$

Kallas normalform för planet.

Alla punkter i planet uppf. denna ekv.

EX

$x + 2y - 3z = 4$ beskriva ett plan med normalvektor och innehåller t.ex. punkterna

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

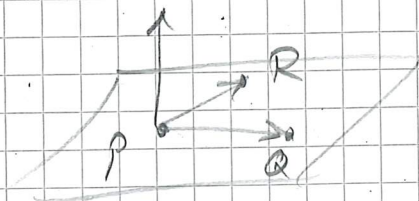
$(4, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(2, 1, 0)$, ...

men inte $(0, 0, 0)$ t.ex.

Ex: Bestäm ekv för planet som innehåller punkterna

$$P: (1, 2, 0), Q: (-1, 1, 1) \text{ och } R: (0, 1, 2).$$

Behövs en punkt i planet (har tre) och en normalvektor



$$Ax + By + Cz = D \quad \text{där} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

$$\text{Bilda } \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

då blir $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ en normalvektor

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ger ekv} \quad -x + 3y + z = D$$

$$\text{Punkten } P \text{ i planet} \quad -1 + 3 \cdot 2 + 0 = D = 5$$

$$\text{Planet's ekv: } \underline{\underline{-x + 3y + z = 5}}$$

Obs Parameterform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + s \vec{u} + t \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2s - t \\ y = 2 - s - t \\ z = s + 2t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

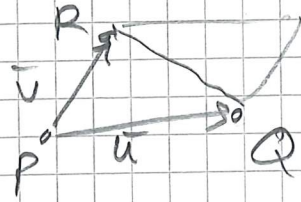
(elim s och t
ger samma ekv)

$$\text{alt} \quad \begin{cases} x = -5 + 3s + 3t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

Tag vekt. ort mot normalen
som bas

Ex (forts)

Vad är arean av triangeln som
P, Q och R är hörn i?



Enligt def. är $|\vec{u} \times \vec{v}| = \text{arean av parallelogr. som } \vec{u} \text{ och } \vec{v} \text{ spänner upp, så arean av triangeln är}$

$$A = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2}$$

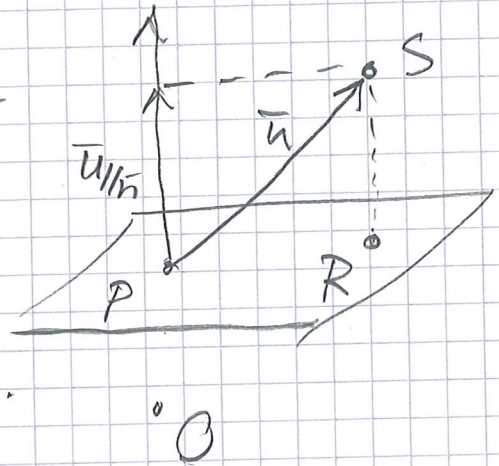
$$= \frac{1}{2} \sqrt{11}$$

Ex: Vilken punkt i planet $x+y-z=4$ ligger närmast punkten $S = (1, 1, 1)$? Vad är avståndet?

Idé: Tag P i planet

Bilda $\vec{u} = \vec{PS}$

Projicera $\vec{u}$ på normalvektor $\vec{n}$.



Avståndet blir $|\vec{u}_{\parallel \vec{n}}|$,

och $\vec{OR} = \vec{OS} - \vec{u}_{\parallel \vec{n}}$ ger koord. för närmaste punkt.

Låt $P = (4, 0, 0)$ i planet (uppf. ekv)

$$\text{Sålt } \vec{u} = \vec{PS} = \vec{OS} - \vec{OP} = e\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{En normalvektor är } \vec{n} = e\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Så} \quad \vec{u}_{\parallel \vec{n}} &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{1^2 + 1^2 + 2^2} e\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-4}{6} e\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} e\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{med längd } |\vec{u}_{\parallel \vec{n}}| &= \frac{2}{3} \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

(14)

R ges nu av

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{u}_{//\vec{n}} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{3} \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{e} \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{3} \\ 1 + \frac{2}{3} \\ 1 - \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 5/3 \\ 5/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{dvs } R = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3} \right) \cdot \square$$

Obs att punkten Q som fås av

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OS} - 2 \cdot \overrightarrow{u}_{//\vec{n}} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{-2}{3} \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\underline{e} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \underline{e} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \underline{e} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

är spegelbilden av S i planet;