

Föreläsning 6

(1)

Rep:

A kvadratisk matris (n x n)

A är inverterbar om det finns en matris A^{-1} så att

$$AA^{-1} = I \text{ och } A^{-1}A = I \quad (I \text{ identitetsmatrisen})$$

Sats

A inverterbar

$$\Leftrightarrow \text{Ekv. systemet } AX = y$$

har en entydig lösning X för varje y (lösningen är då $X = A^{-1}y$)

$$\Leftrightarrow \text{Ekv. systemet } AX = 0$$

har endast lösning $X = 0$

(dvs ej. param. lösning)

Benämnelse: Om systemet eliminerar fås entyd. lösning el. param. allt. ingen

Ex

$$AX = y \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \cdot \\ x_2 + 2x_3 = \cdot \\ x_3 = \cdot \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \cdot \\ x_2 = \cdot \\ x_3 = \cdot \end{cases} \quad \boxed{\text{invers}}$$

↑
fullst. trappa
= en kolonn på varje trappsteg

entydig lösning.

Annars

$$AX = y \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \cdot \\ x_2 + 2x_3 = \cdot \\ 0 = 0 \end{cases}$$

ofullst. trappa

param. lösning / el. ingen lösning

$\boxed{\text{ingen invers}}$

Med totalmatriser

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

invers

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

ingen invers

Obs att högerledet påverkar inte trappens utseende $\Rightarrow$ räkna anta $y=0$
(Entyd. lösning är $x=0$)

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (\text{kan anta } a \neq 0)$$

$$AX=0 \Leftrightarrow \begin{cases} (c) \downarrow ax_1 + bx_2 = 0 \\ (a) \downarrow cx_1 + dx_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + bx_2 = 0 \\ (ad-bc)x_2 = 0 \end{cases}$$

Om $ad-bc=0$ så parametr. lösning, dvs ingen invers

Om $ad-bc \neq 0$ så $x_2=0 \Rightarrow x_1=0$
dvs $X=0$ så invers finns

Talet

$ad-bc$ kallas determinanten

för matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ och}$$

betecknas

$$\det A \text{ el } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \quad (\text{även då } a=0)$$

Ex

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0, \text{ så}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ har invers}$$

$$\left(A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

Swårt göra samma analys för större matriser, (3)
 Vi def. därför determinanten på ett
 annat sätt. Antag A är en $n \times n$ -matris

En tillåten produkt i matrisen A är en
 produkt av n element ur A så att
 precis ett element från varje rad och
 kolonn ingår

Ex

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Tillåten

$$1 \cdot 5 \cdot 9$$

$$2 \cdot 6 \cdot 7$$

$$3 \cdot 4 \cdot 8$$

Ej tillåten

$$2 \cdot 4 \cdot 6$$

$$2 \cdot 4 \cdot 8$$

$$1 \cdot 5 \cdot 8$$

Betrakta den tillåtna produkten

$1 \cdot 6 \cdot 8$ i matrisen

(a, b) är ett positivt
 par i produkten

om b står nedanför till höger om a

Annars ett negativt par (om b nedanför till
 höger)

Par $(1, 6)$ positivt

$(1, 8)$ pos

$(6, 8)$ neg

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \textcircled{6} \\ 7 & \textcircled{8} & 9 \end{pmatrix}$$

Ex

$$\begin{pmatrix} 1 & \textcircled{2} & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & \textcircled{8} \\ \textcircled{9} & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & \textcircled{15} & 16 \end{pmatrix}$$

Tillåten prod $2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 15$

Par: $(2, 8)$

$(2, 9)$

$(2, 15)$

$(8, 9)$

$(8, 15)$

$(9, 15)$

pos

neg

pos

neg

neg

pos

→ true st
 → neg.

(Finns 24 tillåtna prod)

Def: Determinanten av A definieras

som

(summan av alla tillåtna produkter med ett jämnt antal neg. par)

– (summan av alla tillåtna prod. med ett udda antal neg. par).

Ex

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Tillåtna

1,4

2,3

Par (1,4) pos
dvs 0 neg

(2,3) neg
1 neg

$$\det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \text{ som innan}$$

Ex

$$\begin{array}{c} \swarrow \downarrow \swarrow \\ + \downarrow + \downarrow + \downarrow \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= 1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 6 \cdot 8 \cdot 1 - 9 \cdot 2 \cdot 4$$

(Sarrus regel för 3x3)

Ex

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 2$$

$$- 2 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) \cdot 0$$

$$= -13$$

Ex

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 \text{ (alla övr tillåtna inneh. 0)}$$

Obs Om en hel rad el kolonn består av nollor är determin. = 0,

5

Räkneregler

①

$A (n \times n)$. Om två rader eller kolonner i A byter plats fås en ny matris med determinant $= -\det A$.

$$\begin{vmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \textcircled{6} \\ 7 & \textcircled{8} & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\updownarrow \\ \leftarrow \rightarrow}} - \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 \\ 7 & \textcircled{8} & 9 \\ 4 & 5 & \textcircled{6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \textcircled{1} & 3 \\ \textcircled{8} & 7 & 9 \\ 5 & 4 & \textcircled{6} \end{vmatrix}$$

1.8.6 ett negpar noll neg. (Antalet neg. par i en tillåttn. pbd. ändras med 1)

Spec. Om två rader el. kolonner är lika, är $\det A = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\updownarrow} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

②

$\lambda \neq 0$ reellt tal. Då är $\lambda \det A = \det B$ där B fås från A genom att multipl. en rad eller kolonn med λ .

$$5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 20 & 5 & 6 \\ 35 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 20 & 5 & 2 \\ 35 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$5(1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + \dots) = (5 \cdot 1) \cdot 5 \cdot 9 + (5 \cdot 4) \cdot 8 \cdot 3 + \dots$$

③

Determinanten är oförändrad om en multipl. av en rad (eller kolonn) läggs till en rad (eller kolonn)

(5)

Ex (4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-2) \cdot \text{r}_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1) \cdot \text{r}_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 7 & 8 & -7 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & -7 \end{vmatrix} = 0$ (ty kol. med nollor)

(4)

$$\det A = \det A^t$$

(5)

$$\det AB = \det A \cdot \det B$$

(6)

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad \text{om } \det A \neq 0$$

Ex

$$\begin{vmatrix} 6 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1) \cdot \text{r}_1} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1) \cdot \text{r}_2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1) \cdot \text{r}_3} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1) \cdot \text{r}_4} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 2 = -14$$

Ekvationsystemet $AX = 0$ har endast lösningen $X = 0 \Leftrightarrow$ Fullst. trappa efter elimination (dvs ingen 0-rad)

Ex

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obs $\det A = \dots = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \neq 0$

Sats

A är invertierbar

(7)

$$\Leftrightarrow \det A \neq 0$$

ty matrisen i det eliminerade systemet kan fås med operationer i determin.

Om nollrad är determin. = 0, vilket hindrar då A^{-1} existerar

$$AX = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} x & & & 0 \\ 0 & x & & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{array} \right)$$

fullst. trappa $\Rightarrow A^{-1}$ existerar
 $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

eller

$$AX = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} x & & & 0 \\ 0 & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ofullst. trappa, param. lös., A ej inv. bar
 $\Leftrightarrow \det A = 0$.

A $n \times n$ matris. Låt A_{ij} vara den matris man får om man stryker rad i och kolonn j .

Ex

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Talet $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ kallas kofaktorn

til elementet a_{ij} i A .

Sats:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{rad } i \\ \text{kol. } j \end{matrix}$$

$$\det A = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \dots + a_{in} C_{in}$$

(utveckling längs rad i)

$$\det A = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \dots + a_{nj} C_{nj}$$

(utveckling längs kolonn j)

Ex:

$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \text{utr. längs rad 2} \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &+ 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -2(2 \cdot 2 - 3 \cdot 3) - 5(1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = \\ &= -2 \cdot (-5) - 5 \cdot 1 = 5 \end{aligned}$$

Ex:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \text{eliminera} & \quad \uparrow \quad \text{utr. längs kol 1} \quad \text{beräkna 3x3 matris} \end{aligned}$$