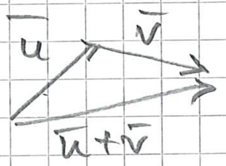
Föreläsning 7 (1)

Ex Geom. vektorer (riktade sträckor)



$$\bar{u}+\bar{v} = 1\cdot\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3 + 4\bar{e}_1 - 5\bar{e}_2 + 6\bar{e}_3$$
$$= 5\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$$ t.ex. $\bar{u}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{u}$

Räkneregler för addition, $t\bar{u}$, $t\in\mathbb{R}$

Matriser av samma typ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$ t.ex. $A+B=B+A$

Samma räkneregler

Polynom: av grad ≤ 2, x obek.

$$p(x)+q(x) = 1+2x-3x^2 + 4-5x+6x^2 = 5-3x+3x^2$$

uppfyller samma räkneregler

Definition En mängd V sägs vara ett vektorrum (över $\mathbb{R}$) och dess element kallas vektorer, om

1. Det finns en operation $+$ (addition) sådan att $\bar{u}+\bar{v}\in V$ för $\bar{u},\bar{v}\in V$ med egenskaperna ($\bar{u},\bar{v},\bar{w}\in V$ nedan)
   - (a) $\bar{u}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{u}$
   - (b) $\bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})=(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}$
   - (c) Det finns ett element $\bar{0}\in V$ så att $\bar{u}+\bar{0}=\bar{u}$ för alla $\bar{u}\in V$.
   - (d) För varje $\bar{u}\in V$ finns $-\bar{u}\in V$ så att $\bar{u}+(-\bar{u})=\bar{0}$ $(\bar{u}-\bar{u}=\bar{0})$

2. Det finns en operation $\cdot$ (multipl. med reellt tal), så att $t \cdot \bar{u} \in V$ $(t\bar{u})$ för varje $t \in \mathbb{R}$, $\bar{u} \in V$, med egenskaperna $(t, s \in \mathbb{R},\ \bar{u}, \bar{v} \in V)$

(a) $1 \cdot \bar{u} = \bar{u}$

(b) $t(s\bar{u}) = (ts) \cdot \bar{u}$

(c) $(t+s) \cdot \bar{u} = t\bar{u} + s\bar{u}$

(d) $t(\bar{u}+\bar{v}) = t\bar{u} + t\bar{v}$

Kan visas:

- Det finns bara ett element $\bar{0}$:

<u>B:</u> Om $\bar{0}_1$ och $\bar{0}_2$ båda uppf. 1(c) är $\bar{0}_1 = \bar{0}_1 + \bar{0}_2 = \bar{0}_2$

- $0 \cdot \bar{u} = \bar{0}$ alltid

<u>B:</u> $0 \cdot \bar{u} = 0\bar{u} + \bar{0} = \bar{u} + 0 \cdot \bar{u} - \bar{u} = 1 \cdot \bar{u} + 0 \cdot \bar{u} - \bar{u}$
$= (1+0)\bar{u} - \bar{u} = 1 \cdot \bar{u} - \bar{u} = \bar{u} - \bar{u} = \bar{0}$

- $(-1) \cdot \bar{u} = -\bar{u}$

<u>B:</u> $-\bar{u} = -\bar{u} + \bar{0} = -\bar{u} + 0 \cdot \bar{u} = -\bar{u} + (1-1) \cdot \bar{u}$
$= -\bar{u} + \bar{u} + (-1) \cdot \bar{u} = \bar{0} + (-1)\bar{u} = (-1)\bar{u}$.

<u>Ex:</u> $\mathbb{R} = \{$reella tal$\}$ $+, \cdot$ som vanligt

$\bar{x} = x$
$\bar{y} = y$

$\bar{x} + \bar{y} \in \mathbb{R}$, $t \cdot \bar{x} \in \mathbb{R}$

$\bar{0} = 0$ $\quad \bar{x} - \bar{x} = \bar{0}$ Vektorrum

<u>Ex:</u> $G = \{$geom. vektorer (riktade sträckor) i rummet (el planet)$\}$

$+, \cdot$ som förut. Vektorrum

Ex

$M_{2\times 3} = \{ 2\times 3\text{-matriser} \} \quad +, \cdot$

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}$$

$M_{n\times k}$ vektorrum

Ex

$\mathbb{Z} = \{ \text{heltal} \} \quad +, \cdot$

$n + m \in \mathbb{Z} \qquad 2+3=5, \quad 2-2=0$

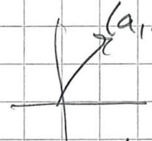
men $\frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ så ej vekt.rum.

Ex

$\mathbb{C} = \{ \text{komplexa tal} \}$

$$a+bi + c+di = (a+c)+(b+d)i$$
$$t(a+bi) = ta + tbi$$
$$\bar{0} = 0 + 0i \qquad \text{Vektorrum}$$
$$a+bi + (-a)+(-b)i = 0 + 0\cdot i$$

jmf. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$



kompl. talplanet

Ex:

$\mathbb{P}_2 = \{ \text{polynom (över } \mathbb{R}) \text{ av grad} \le 2 \}$

$$\bar{u} = p(x) = a + bx + cx^2 \qquad (a,b,c \in \mathbb{R})$$
$$\bar{v} = q(x) = d + ex + fx^2$$
$$\bar{u} + \bar{v} = a+d + (b+e)x + (c+f)x^2$$
$$\bar{0} = 0 + 0x + 0x^2$$
$$-\bar{u} = -a - bx - cx^2$$

Vektorrum.

4

Ex $\{$ polynom av grad $= 2\}$ är ej vektorrum

$$(1 + 0x + x^2) + (2 + 3x - x^2)$$
$$= 3 + 3x \quad \text{ej grad } 2$$

Även $\bar{0}$ ej grad 2

Viktigt exempel

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) ; \; x_i \in \mathbb{R} \text{ för alla } i\}$$

"n-tippel" ; gäller att

$n = 1$ $\quad \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$

$n = 2$ $\quad \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) ; \; x_i \in \mathbb{R}\}$

ordnat par

Addition $\quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

Mult $\quad t(x_1, x_2) = (tx_1, tx_2) \quad (t \in \mathbb{R})$

$$\bar{0} = (0, 0)$$

Ex

$$5(1,2) + 3(-1,1) = (5,10) + (-3,3)$$
$$= (2, 13)$$

uppf. alla egensk.

(jämf. kompl. tal

$$5(1 + 2i) + 3(-1 + i) = 2 + 13i \,)$$

Alt pol grad ≤ 1 $\quad (\mathbb{P}_1 = \{a + bx\})$

Allm $\quad \mathbb{R}^n$ är vektorrum med operationer som ovan.

Definition En delmängd U av V kallas ett **underrum** i V om

1. $\bar{u}+\bar{v} \in U$ då $\bar{u}, \bar{v} \in U$
2. $t\bar{u} \in U$ då $t \in \mathbb{R}$, $\bar{u} \in U$

Obs: $0 \cdot \bar{u} = \bar{0} \in U$ för alla underrum enl 2.

$-\bar{u} = (-1) \cdot \bar{u} \in U$ om $\bar{u} \in U$.

Ex $V = \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) ; x_i \in \mathbb{R}\}$

Låt $U = \{(x_1, 0, x_3) ; x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$

T.ex $(1, 0, 4) \in U$, $(1, 1, 2) \notin U$

Är U ett underrum?

kolla 1 och 2.

Tag $\bar{u}, \bar{v} \in U$, $\bar{u} = (u_1, 0, u_3)$
$\bar{v} = (v_1, 0, v_3)$

Då är $\bar{u}+\bar{v} = (u_1+v_1, 0, u_3+v_3) \in U$

och $t\bar{u} = (tu_1, 0, tu_2) \in U$

Ja underrum.

Ex: $V = \mathbb{R}^3$

$U = \{(x_1, x_2, x_3) ; x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$

U underrum?

Tag $\bar{u}, \bar{v} \in U$, dvs

$$\bar{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{så} \quad u_1 + 2u_2 - 3u_3 = 0$$
$$\bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{så} \quad v_1 + 2v_2 - 3v_3 = 0$$

Då är $\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

Gäller $\bar{u} + \bar{v} \in U$? Ekv. måste uppfyllas

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3$$
$$= (u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2) - 3(u_3 + v_3)$$
$$= \underbrace{u_1 + 2u_2 - 3u_3}_{=0} + \underbrace{v_1 + 2v_2 - 3v_3}_{=0} = 0$$

Även $t\bar{u} = (tu_1, tu_2, tu_3)$ och

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = tu_1 + 2tu_2 - 3tu_3$$
$$= t\underbrace{(u_1 + 2u_2 - 3u_3)}_{=0} = t \cdot 0 = 0$$

Så U är underrum.

Obs att koeff. $1, 2, -3$ spelar ingen roll $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ bildar underrum.

<u>Ex</u> U alla vektorer i $\mathbb{R}^3$ som uppf $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$ är ej underrum, ty $\bar{0} = (0, 0, 0) \notin U$.

Ex (*)

$V = M_{2\times 2} = \{ \text{2×2-matriser} \}$

Sätt $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} ;\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

Underrum?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \\ f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b+e \\ c+f & 0 \end{pmatrix} \in U$$

$$t \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta & tb \\ tc & 0 \end{pmatrix} \in U$$

Ja, underrum.

Definition V vektorrum

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in V, \quad t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$

Då är $t_1\bar{v}_1 + t_2\bar{v}_2 + \dots + t_n\bar{v}_n$

en linjärkombination av $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$

Mängden U av alla sådana linjärkombin. kallas det linjära höljet av $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$

Beteckning $U = [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n]$

U är ett underrum i V.

Ex $(\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 - 3\bar{v}_3) + (5\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2)$

$= 6\bar{v}_1 + 4\bar{v}_2 - 3\bar{v}_3 \in [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3]$

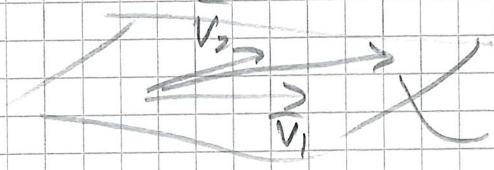
$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ sägas generera U

(spänna upp)

Ex $V = \mathbb{R}^3$ $\quad U = [(1,2,3),(4,5,6)]$

U underrummet som genereras av $\bar{v}_1 = (1,2,3)$, $\bar{v}_2 = (4,5,6)$

jämför



$s\bar{v}_1 + t\bar{v}_2 \in U$

Ex: Varje $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ kan skrivas

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3)$$

$$= x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)$$

Def: Standardbasen för $\mathbb{R}^3$

$$\bar{e}_1 = (1,0,0), \quad \bar{e}_2 = (0,1,0)$$
$$\bar{e}_3 = (0,0,1)$$

Då är

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$$
$$= (\bar{e}_1 \; \bar{e}_2 \; \bar{e}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Så $\mathbb{R}^3 = [\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3]$

Ex $(1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$ kan skrivas

$\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ i standardbasen för $\mathbb{R}^4$

$\bar{e}_1 = (1,0,0,0)$
$\bar{e}_2 = (0,1,0,0)$ osv

Ex: Beskriv vektorerna i

$$U = [\underbrace{(-1,1,1)}_{\bar{v}_1}, \underbrace{(4,0,-1)}_{\bar{v}_2}, \underbrace{(3,1,0)}_{\bar{v}_3}] \text{ i } \mathbb{R}^3$$

Obs att $\bar{v}_1 = \underline{e}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\bar{v}_3 = \underline{e}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$

och att alla vektorer $\bar{x}$ i U kan skrivas

$$t_1\bar{v}_1 + t_2\bar{v}_2 + t_3\bar{v}_3 = \bar{x},$$

dvs

$$t_1\underline{e}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + t_2\underline{e}\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix} + t_3\underline{e}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -t_1 + 4t_2 + 3t_3 = x_1 \\ t_1 + t_3 = x_2 \\ t_1 - t_2 = x_3 \end{cases} \quad \text{att} \quad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 3 & x_1 \\ 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 1 & -1 & 0 & x_3 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \end{array} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 3 & x_1 \\ 0 & 4 & 4 & x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 - 3x_2 + 4x_3 \end{array}\right),$$

med lösn endast då $x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$

Så U är alla vektorer vars koord. uppf. $x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$

Obs att $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$

Så $U = \left[\underline{e}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \underline{e}\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}\right] = [(-1,1,1),(4,0,-1)]$

ger samma underrum.

$(3,1,0)$ är ett "löjligt element"