

Föreläsning 8

1

V vektorrum + addition $\vec{u} + \vec{v} \in V$
• mult. med reellt tal $t\vec{u} \in V$
Samt räknelagen.

U underrum om U delm. av V
och $\vec{u}, \vec{v} \in U \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in U$
 $\vec{u} \in U, t \in \mathbb{R} \Rightarrow t\vec{u} \in U.$

Ex: $\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R} \}$

Standardbas: $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$,

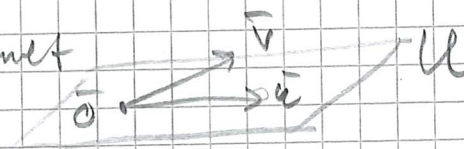
$\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$

$\vdots$
 $\vec{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$

Kan skriva $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underline{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Identifiera $\mathbb{R}^2$ med planet

$\mathbb{R}^3$ med rummet



Varje vektor i $\mathbb{R}^3$ kan skrivas som en
linj. komb. av $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, som sägs
generera $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &= [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)] \\ &= \left[\underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$(1, 2, 3) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0) + 3 \cdot (0, 0, 1)$$

$\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} (1, 2) + 3(4, -5) &= (1, 2) + (12, -15) \\ &= (13, -13) = 13(1, -1) \end{aligned}$$

Ex

Är $\mathbb{R}^3 = [(1, 1, 0), (1, -1, 1), (1, 0, -1)]$?

(2)

Ans, Om $x = (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

finns ^{da} alltid tal $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ så att

$$t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ?$$

Man får

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = x_1 \\ t_1 - t_2 = x_2 \\ t_2 - t_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & x_3 \end{array} \right)$$

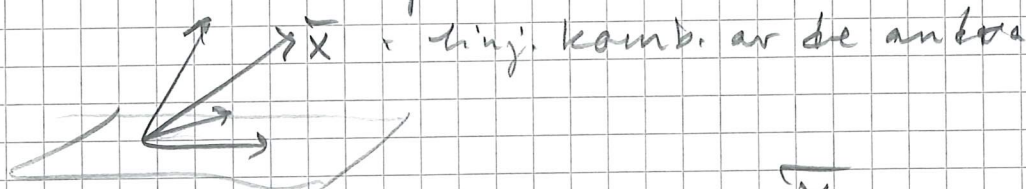
$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & -2 & x_2 - x_1 + 2x_3 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = x_1 \\ -2t_2 - t_3 = x_2 - x_1 \\ -2t_3 = x_2 - x_1 + 2x_3 \end{cases}$$

Ja, för varje val av $\bar{x}$ finns en (enligt) lösning till systemet

Geometriskt:

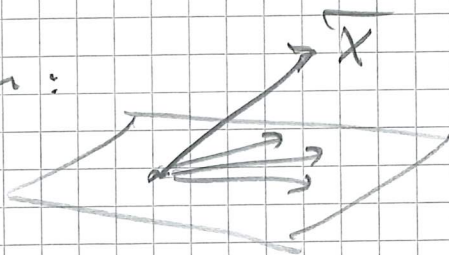
De tre vektorerna ligger i samma plan

och $\bar{x}$ kan skrivas som linj. komb. av de andra



Om $\bar{x}$ ligger i samma plan:

$\bar{x}$ kan skrivas som linj. komb. av de andra



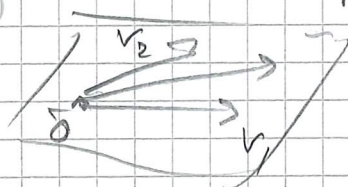
Def:

V vektorrum. Låt $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in V$.

Om ekvationen

$$t_1 \bar{v}_1 + t_2 \bar{v}_2 + \dots + t_n \bar{v}_n = \bar{0} \quad (\text{beroende ekr.})$$

endast har lösningen $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$,sågas vektorerna $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ varalinjärt oberoende. Annars linjärt beroende.EX: Om $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ ligger i samma plan (under rum), är



$$t_1 \bar{v}_1 + t_2 \bar{v}_2 = \bar{v}_3 \quad \text{för några } t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow t_1 \bar{v}_1 + t_2 \bar{v}_2 + (-1) \bar{v}_3 = \bar{0},$$

så linjärt ber.EX: Om $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ är parallella,

$$t \bar{v}_1 = \bar{v}_2, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\text{är} \quad t \bar{v}_1 + (-1) \bar{v}_2 = \bar{0}$$

så linj. ber.

$$\text{EX} \quad \bar{v}_1 = e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = e \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{v}_3 = e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(i tidigare exempel). Linj. obero?

$$\begin{matrix} (\text{linj.} \\ \text{ekv.}) \end{matrix} \quad t_1 \bar{v}_1 + t_2 \bar{v}_2 + t_3 \bar{v}_3 = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{x} = \bar{0})$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 0 \\ -2t_2 - t_3 = 0 \\ -2t_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 0 \\ t_3 = 0 \end{cases}$$

Ja, de är linjärt obero.

Ekv. systemet elimineras till en trappa med en kolonn på varje trappsteg.

(*) Parameterlösner ger linjärt ber.

(*) Flera kolonner på ett trappsteg ger, linjärt ber.

Ex:

$$U = \left[e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

U underrum i $\mathbb{R}^3$. Är generatorerna linjärt obero?

Ber. ekv :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

3 obek - 2 ekv $\Rightarrow$ 1 param.

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 + 2t_3 = 0 \\ t_2 + t_3 = 0 \end{cases} \quad \text{param. lösner} \Rightarrow \text{lin. ber.}$$

Obs två vektorer

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ linj. obero.}$$

T.ex är $e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ är ett lösligt element)

Så $U = \left[e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

Def: Om $V = [\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n]$ och $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ är linjärt oberoende, säges $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ vara en bas för V . Det maximala antalet linjärt oberoende vektorer i ett vektorrum kallas dimensionen av V .

Ex $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\mathbb{R}^n = [\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n]$
bas för $\mathbb{R}^n$

Om $U = [\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k]$ är ett underrum i V fås en bas för U genom att eliminera överflödiga element.

Ex: Bestäm en bas för underrummet

$$U = \left[\underset{\bar{v}_1}{e \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{\bar{v}_2}{e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\bar{v}_3}{e \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}, \underset{\bar{v}_4}{e \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \right] \text{ i } \mathbb{R}^4$$

Beroende ekr:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{4 rader} \\ -2 \text{ ekr} \\ 2 \text{ param.} \end{array}$$

Param. lös. $\Rightarrow$ linj. ber.

Man ser att ber. ekr med endast de två första vektorerna ger en trappa med en kol. på varje trappsteg.

(6)

Man får $U = \left[e \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = [\bar{v}_1, \bar{v}_2]$

(man kan alltså en vektor på varje trappsteg)

Så $\dim U = 2$ med bas $\bar{v}_1 = e \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Obs att ekv. systemet ger en param. lösning

$$\begin{cases} t_1 = -2s - t \\ t_2 = s - t \\ t_3 = s \\ t_4 = t \end{cases} \quad \text{till } t_1 \bar{v}_1 + t_2 \bar{v}_2 + t_3 \bar{v}_3 + t_4 \bar{v}_4 = \bar{0},$$

och man kan uttrycka $\bar{v}_3$ med $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ genom att sätta $s=1, t=0$, och motsv. för $\bar{v}_4$.

$$s=1, t=0 \Rightarrow -2\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 = \bar{0} \\ \Leftrightarrow 2\bar{v}_1 - \bar{v}_2 = \bar{v}_3 \quad (\bar{v}_3 \text{ löslöst})$$

Istället för att beskriva U med generatorerna kan man beskriva U med ekvationer:

En vektor $\bar{x} = e \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tillhör U

endast då

$$t_1 \bar{v}_1 + t_2 \bar{v}_2 + t_3 \bar{v}_3 + t_4 \bar{v}_4 = \bar{x},$$

dvs

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & x_2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & x_3 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & x_4 \end{array} \right) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_4 \end{array} \right) \quad (7)$$

med lösner endast då

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

U består av alla lösner till ekv. systemet och kallas lösningssummet till syst.

Obs: Om man endast har ekv, kan man hitta en bas för U genom att lösa det:

$$\begin{cases} x_1 = -3 - 2t \\ x_2 = t \\ x_3 = 3 \\ x_4 = t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

dvs varje $\vec{x} \in U$ kan skrivas

$$\vec{x} = s \underline{e} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \underline{e} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obs antalet parametrar = $\dim U$.

$$\text{Så } U = \left[\underline{e} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \dim U = 2$$

annan bas för U (än den tidigare)

Man kan t.ex

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{v}_1$$

och även för $\vec{v}_2$
Så det är samma underum som tidigare

U är lösrum till

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

med bas (t.ex)

$$\vec{f}_1 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\vec{f}_1 = \vec{v}_1, \vec{f}_2 = \vec{v}_2)$$

Båda basv. uppf. båda ekv.

Vektorn $\vec{f}_3 = \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ uppf. första men

inte andra ekv. Vektorrummet

$$U_2 = \left[\underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

har dimension 3 och innehåller U .

U_2 är lösrummet till

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

(4 obek - 1 ekv = 3 parametrar $\Rightarrow \dim U_2 = 3$)

Vektorn $\vec{f}_4 = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tillhör ej U_2

(och därmed ej U). Man får

$$\mathbb{R}^4 = [\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4]$$
 eftersom $\dim$

av höljet är 4 och $\dim \mathbb{R}^4 = 4 =$
max antal linj. obero. vektorer.

Vi har utvidgat basen för U
till en bas för $\mathbb{R}^4$.

(9)

$$U \subseteq U_2 \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$[\bar{f}_1 \bar{f}_2] \subseteq [\bar{f}_1 \bar{f}_2 \bar{f}_3] \subseteq [\bar{f}_1 \bar{f}_2 \bar{f}_3 \bar{f}_4]$$

Ex: Tag $\bar{u} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vad blir koord. för

$\bar{u}$ i basen $\bar{f}_1 \bar{f}_2 \bar{f}_3 \bar{f}_4$ ovan?

Hitta tal y_1, y_2, y_3, y_4 så att

$$y_1 \bar{f}_1 + y_2 \bar{f}_2 + y_3 \bar{f}_3 + y_4 \bar{f}_4 = \bar{u}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 2 \end{cases}, \text{ ju}$$

$$\bar{u} = 0 \cdot \bar{f}_1 - 1 \cdot \bar{f}_2 + 0 \cdot \bar{f}_3 + 2 \cdot \bar{f}_4$$

$$= (\bar{f}_1 \bar{f}_2 \bar{f}_3 \bar{f}_4) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{f} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\text{dvs } \bar{u} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{f} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

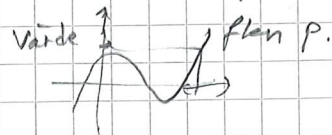
(vektorrum dimension 4.)

10

Ex:

$$P_3 = \{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3; \text{ alla } a_i \in \mathbb{R} \}$$

(x obekant)



$$\bar{u} = 2 - x + x^2 + 3x^3 \in P_3$$

P_3 är ett vektorrum (jmf $\mathbb{R}^4$)

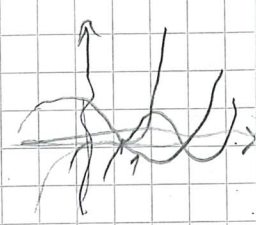
$$2 \cdot 1 - 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 3 \cdot x^3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

bas för P_3 $x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x^2$

$$\dim P_3 = 4.$$

$$\text{Låt } U = \{ p(x) \in P_3; p(1) = 0 \}$$



dvs alla pol. i P_3 med nollst $x=1$.

Polynomlet

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = x \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in U$$

uppf.

$$a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 = 0$$

dvs

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

U är lösningssubrumet till ekv.

Bas för U ?

$$\{ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Leftrightarrow$$

4 obek
- 1 ekv ger 3 param

$$\begin{cases} a_0 = -r - s - t \\ a_1 = r \\ a_2 = s \\ a_3 = t \end{cases}$$

Är U underutrum:

Om $p(x), q(x) \in U$ är

$$p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0, \text{ så } p(x) + q(x) \in U$$

$\neq p(1) = 0, t \in \mathbb{R}, \text{ så } t \cdot p(x) \in U.$

Ans

(11)

$$\underline{x} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = r \underline{x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \underline{x} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \underline{x} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bas for U .

$$\underline{x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 = -1 + x$$

$$\underline{x} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 + x^2, \quad \underline{x} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + x^3$$

$$U = [x-1, x^2-1, x^3-1] \quad \dim U = 3$$

$$U = \{ r(x-1) + s(x^2-1) + t(x^3-1); r, s, t \in \mathbb{R} \}$$

$$(x-1) (r + s(x+1) + t(x^2+x+1))$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = r(x-1) + s(x^2-1) + t(x^3-1) \in U$$

$$\text{Ex: } 1 - 3x + x^2 + x^3$$

$$p(1) = 0$$

$$-3(x-1) + 1 \cdot (x^2-1) + 1 \cdot (x^3-1)$$

$$4 - 5x + 3x^2 - 2x^3$$

$$= -5(x-1) + 3(x^2-1) - 2(x^3-1)$$