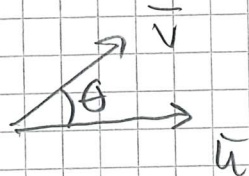


Föreläsning 9

1

Vektorn $\vec{u}$ i planet eller rummet



Def:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

Skalarprod. av geom. vektorer

I ON-bas

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \underline{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \underline{e} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Egensk.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ är ortogonala } (\theta = \frac{\pi}{2})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \geq 0 \quad (\theta = 0)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Allmän def. av skalarprodukt

Definition: V vektorrum. En skalarprodukt på V , betecknas $(\vec{u} | \vec{v})$ för $\vec{u}, \vec{v} \in V$, uppfyller $(\vec{u} | \vec{v}) \in \mathbb{R}$, och

$$(1) \quad (\vec{u} | \vec{v}) = (\vec{v} | \vec{u})$$

$$(2) \quad (\vec{u} | \vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} | \vec{v}) + (\vec{u} | \vec{w})$$

$$(3) \quad (\vec{u} | t\vec{v}) = t(\vec{u} | \vec{v}), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(4) \quad (\vec{u} | \vec{u}) \geq 0, \text{ med likhet endast då } \vec{u} = \vec{0}.$$

Ett vektorrum V med en skalär produkt kallas ett euklidiskt rum.

2

Definition: Om V är ett euklidiskt rum och $\vec{u}, \vec{v} \in V$ definieras längden av $\vec{u}$ som $|\vec{u}| = \sqrt{(\vec{u}|\vec{u})}$.
 $\vec{u}$ och $\vec{v}$ i V säges vara ortogonala om $(\vec{u}|\vec{v}) = 0$
(bet. $\vec{u} \perp \vec{v}$)

Ex: $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med

$$(\vec{u}|\vec{v}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$$\text{där } \vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Vi skriver $\vec{u} \cdot \vec{v}$ för denna skalärprod.
kallas standard skalärprod. i $\mathbb{R}^n$.

Ex För standardbasen

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$$

$$\vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$$

$$\vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$$

$$\vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$$

i $\mathbb{R}^4$, gäller t.ex.

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0, \quad \text{osv.}$$

så standardbasens vektorer är ortogonala.

Vi kan också beräkna längden
av vektorer i $\mathbb{R}^n$ (med standard-
skalarpod)

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Obs att $|\vec{e}_i| = \sqrt{1^2} = 1$ för alla $i=1, \dots, n$

Ex $\vec{u} = (-1, 1, 6, 2)$, $\vec{v} = (1, -1, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$

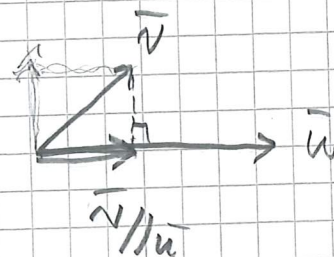
$$|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{42}$$

och $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 - 1 + 6 - 4 = 0$ så $\vec{u} \perp \vec{v}$.

För $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ definierar vi den
ortogonala projektionen av $\vec{v}$ på $\vec{u}$

som

$$\vec{v}_{\parallel \vec{u}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \vec{u}$$

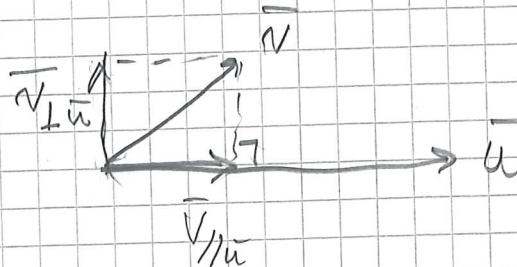


och

$$\vec{v}_{\perp \vec{u}} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel \vec{u}}$$

är ortogonala komplementet

av $\vec{v}_{\parallel \vec{u}}$.



Man kan se att

$$\vec{v}_{\parallel \vec{u}} \cdot \vec{v}_{\perp \vec{u}} = 0$$

Def: Mängden $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$

sägs vara en ortonormerad mängd

om $\bar{u}_i \cdot \bar{u}_j = 0$ då $i \neq j$

$\bar{u}_i \cdot \bar{u}_i = 1$ för alla i

dvs $|\bar{u}_i| = 1$.

Ex: Standardbasen $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ i $\mathbb{R}^n$
är en ortonormerad mängd.

Sats: Om $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$ är en ON-mängd
i $\mathbb{R}^n$ är vektorerna linj. obero.

Beri's: Beroendekv.

$$t_1 \bar{u}_1 + t_2 \bar{u}_2 + \dots + t_m \bar{u}_m = \bar{0}$$

Tag skalarprod. av båda sidor med
godt. $\bar{u}_i$:

$$\underbrace{t_1(\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_i)}_{=0} + \underbrace{t_2(\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_i)}_{=0} + \dots + \underbrace{t_i(\bar{u}_i \cdot \bar{u}_i)}_1 + \dots = \underbrace{\bar{0} \cdot \bar{u}_i}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow t_i = 0$$

Det följer att alla $t_i = 0$
så $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$ linj. obero. $\square$

Spec. om $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$ en ON-bas
för underrummet $U = [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m]$.

Def: Om U är ett underrum i $\mathbb{R}^n$
 är det ortogonala komplementet
 till U , underrummet

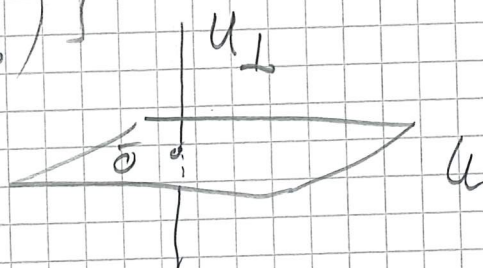
$$U_{\perp} = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n ; \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ för alla } \vec{u} \in U \}$$

(dvs alla vektorer i $\mathbb{R}^n$ som är
 ortog. mot alla vektorer i U).

Ex $\mathbb{R}^3$, U planet $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$

Da blir $U_{\perp} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right]$

(dvs normalvektorn
 genom $\vec{0}$).



Ex: Om $\{ \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4 \}$ är en ON-bas
 för $\mathbb{R}^4$ och $U = [\vec{f}_1, \vec{f}_2]$,

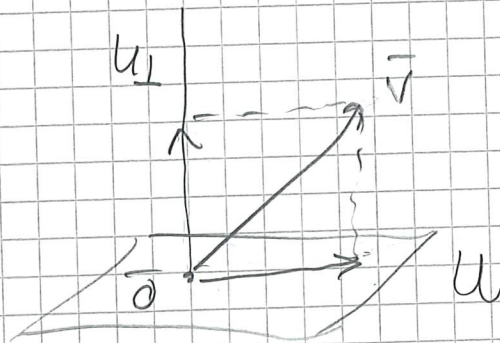
blir $U_{\perp} = [\vec{f}_3, \vec{f}_4]$.

Varje vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$ kan
 skrivas

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel U} + \vec{v}_{\perp U},$$

där $\vec{v}_{\parallel U} \in U$

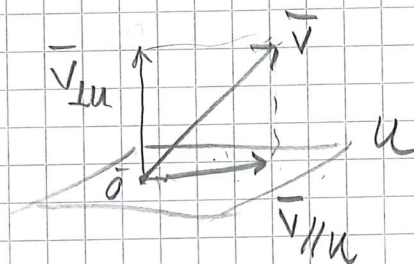
och $\vec{v}_{\perp U} \in U_{\perp}$.



Sats: Om $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m$ är en ON-bas för U , blir den ortog. proj. av $\bar{v}$ på U vektorn

$$\bar{v}_{//U} = (\bar{v} \cdot \bar{f}_1) \bar{f}_1 + (\bar{v} \cdot \bar{f}_2) \bar{f}_2 + \dots + (\bar{v} \cdot \bar{f}_m) \bar{f}_m$$

Beris: Vektorn $\bar{v}$ kan skrivas



$$\bar{v} = \bar{v}_{//U} + \bar{v}_{\perp U} =$$

$$= t_1 \bar{f}_1 + t_2 \bar{f}_2 + \dots + t_m \bar{f}_m + \bar{v}_{\perp U},$$

för några tal $t_1, t_2, \dots, t_m$. Tag skalärprodukten av båda sidor med ett godt. $\bar{f}_i$ så att

$$\bar{v} \cdot \bar{f}_i = t_1 \underbrace{(\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_i)}_{=0} + \dots + t_i \underbrace{(\bar{f}_i \cdot \bar{f}_i)}_{=1} + \dots + \underbrace{\bar{v}_{\perp U} \cdot \bar{f}_i}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow \bar{v} \cdot \bar{f}_i = t_i,$$

vilket visar satsen. $\square$

Ex

(7)

Låt $U = \left[e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \subseteq \mathbb{R}^4$

a) Bestäm den ortogonala projektionen av

$$\bar{v} = e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \text{på } U.$$

b) Bestäm den ortog. proj. av

$$\bar{v} \quad \text{på } U^\perp.$$

Lös: a) Den ortog. proj ges av

$$\bar{v}_{//U} = (\bar{v} \cdot \bar{f}_1) \bar{f}_1 + (\bar{v} \cdot \bar{f}_2) \bar{f}_2,$$

där $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ är en ON-bas för U .

Vi behöver hitta en ON-bas för U .

$$\text{Sätt } \bar{u}_1 = e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{u}_2 = e \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De är linj. oberoende (ej parallella)
och bildar en bas för U .

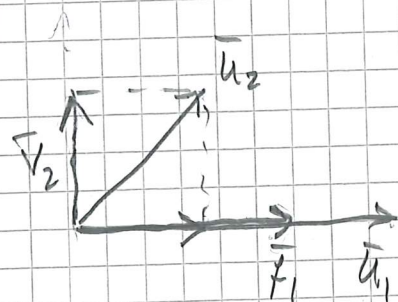
$$\text{ej ON-bas: } \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = -1 + 2 + 0 + 1 = 2 \neq 0$$

$$\text{Välj } \bar{f}_1 = \frac{1}{|\bar{u}_1|} \bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Projicera $\bar{u}_2$ på $\bar{f}_1$
och beräkna ortog.

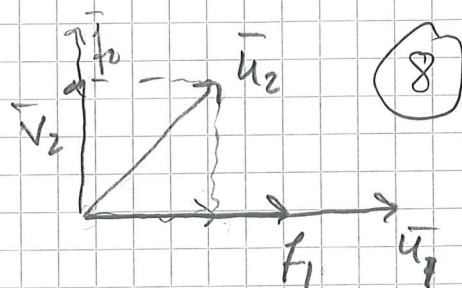
komplementvektorn $\bar{v}_2$

$\bar{f}_1$ och $\bar{v}_2$ är då ortog. i U .



dvs

$$\bar{u}_2 // \bar{f}_1 = \frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{f}_1}{|\bar{f}_1|^2} \bar{f}_1 = (\bar{u}_2 \cdot \bar{f}_1) \bar{f}_1$$



$$\begin{aligned} \text{Så} \quad \bar{v}_2 &= \bar{u}_2 - (\bar{u}_2 \cdot \bar{f}_1) \bar{f}_1 = \underline{e} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{f}_1 \\ &= \dots = \frac{1}{3} \underline{e} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

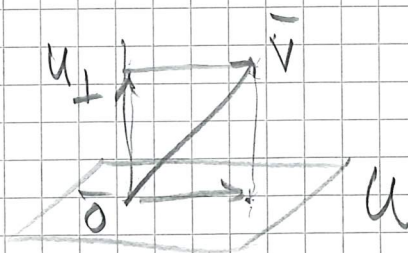
$$\text{Så att} \quad \bar{f}_2 = \frac{1}{|\bar{v}_2|} \bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \underline{e} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{kontroll} \quad (\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 = 0)$$

Di blir $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ en ON-bas för U ,

$$\text{och} \quad \bar{v} // U = (\bar{v} \cdot \bar{f}_1) \bar{f}_1 + (\bar{v} \cdot \bar{f}_2) \bar{f}_2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \underline{e} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \dots = \frac{1}{17} \underline{e} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Proj. av $\bar{v}$ på kompl. $U^\perp$
gavs av



$$\bar{v} \perp U = \bar{v} - \bar{v} // U =$$

$$= \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{17} \underline{e} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \underline{e} \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 19 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ex:

Bestäm en ON-bas i $\mathbb{R}^4$ för

(9)

$$U = \{ \bar{u} \in \mathbb{R}^4; x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \},$$

och utvidga till en ON-bas för $\mathbb{R}^4$.

Lös:

Vi behöver först en bas för U .

$$\{ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2r - 2s - t \\ x_2 = r \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$$

4 beteck
-1 ekv
3 param

$$\begin{cases} x_1 = -2r - 2s - t \\ x_2 = r \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$$

$r, s, t \in \mathbb{R}$

dvs varje vektor i U kan skrivas

$$\underline{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = r \underline{e} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \underline{e} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \underline{e} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

och vi ser att $\dim U = 3$, med bas

$$\bar{u}_1 = \underline{e} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_2 = \underline{e} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_3 = \underline{e} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U = [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3].$$

Obs att $\{ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3 \}$ ej ON-mängd.

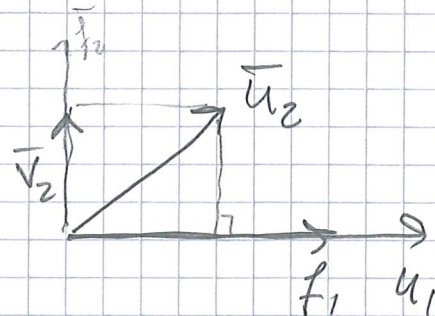
Bilda

$U_1 = [\bar{u}_1, \bar{u}_2]$ (som är en delmängd av U)

(10)

Vi skapar en ON-bas för U_1 :

Sätt $\bar{f}_1 = \frac{1}{\|\bar{u}_1\|} \bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} e \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



Komplementet av proj.
av $\bar{u}_2$ på $\bar{f}_1$ blir

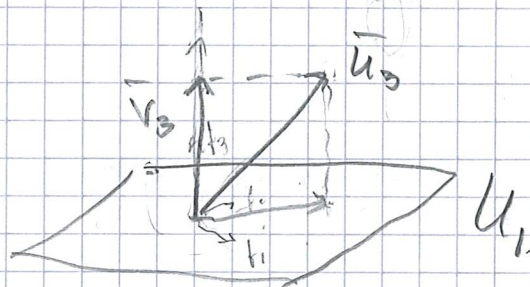
$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - (\bar{u}_2 \cdot \bar{f}_1) \bar{f}_1 = \dots = \frac{1}{5} e \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sätt $\bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{45}} e \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ (testa $\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 = 0$)

Då är $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ en ON-bas för U_1 ,

och $U = [\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{u}_3]$

Vi projicerar $\bar{u}_3$ på U_1
och ber. kompl. $\bar{v}_3$



$$\begin{aligned} \bar{v}_3 &= \bar{u}_3 - \bar{u}_3 // U_1 = \bar{u}_3 - ((\bar{u}_3 \cdot \bar{f}_1) \bar{f}_1 + (\bar{u}_3 \cdot \bar{f}_2) \bar{f}_2) \\ &= \dots = \frac{1}{5} e \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sätt nu $\bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{90}} e \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$, och

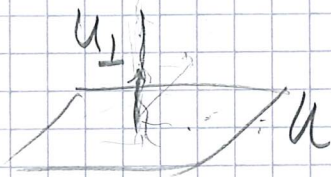
vi har hittat en ON-bas för U :

$$U = [\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3] \quad (\text{med Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod})$$

Vi vill slutligen utvidga ON-basen
för U till en ON-bas för $\mathbb{R}^n$
Eftersom $\dim \mathbb{R}^n = 4$ behövs

(11)

en vektor $\bar{f}_4$ som är



ortog. mot U , dvs $\bar{f}_4 \in U^\perp$

Obs att alla vektorer i U
uppfyller ekv.

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

vilket är en skalärprodukt:

$$\underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

Så vektorn $\underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är ortog.

mot alla vektorer i U .

$$\text{Tag } \bar{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{10}} \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{så}$$

blir $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4$ en ON-bas
för $\mathbb{R}^n$.