9.1.9 Bestäm största möjliga vinkel mellan $\bar{u} = e\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ och $\bar{v} = e\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$

då $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

Lösn: Obs att bivillkoret säger att $|\bar{u}| = |\bar{v}| = 1$

Vinkeln φ mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$

ges av

$$\cos\varphi = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|} = \bar{u}\cdot\bar{v} = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

och är som störst då $\cos\varphi$ är som minst.

Om $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vill vi alltså hitta minsta värdet av den kvadratiska formen

$$Q(\bar{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 ,$$

under bivillkoret $|\bar{x}| = 1$.

Formens matris blir $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$,

och vi diagonaliserar.

Egenvärden

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1-\lambda & -\lambda & 1/2 \\ 1-\lambda & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} (-1) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -\lambda-1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-1/2 \end{vmatrix}$$

$= (1-\lambda)(\lambda + \frac{1}{2})^2$, vilket är 0

då $\lambda = 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, dvs egenvärdena för formen

$$Q(\bar{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

är $\quad 1$, och $-\frac{1}{2}$ (dubbel)

<u>Egenvektorer</u> (ON-bas)

<u>$\lambda = 1$</u>:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ldots \quad \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \end{cases} \quad \text{dvs } \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \neq 0$$

<u>$\lambda = -\frac{1}{2}$</u> Eftersom A är symmetrisk finns en ON-bas av egenvektorer och två av dem har egenvärde $-\frac{1}{2}$ kan vi välja en ortog. mot $\bar{f}_1$, tex $\bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och beräkna

$$\bar{f}_3 = \bar{f}_1 \times \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

I denna ON-bas blir formen

$$Q(\bar{y}) = y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2$$

där $\bar{y} = \underline{f}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Vi söker minsta värdet av

$$Q(\bar{y}) = y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2$$

då $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$

Det är klart att

$$y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2 \geq -\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2$$

vilket är $-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = -\frac{1}{2}$

Så

$Q(\bar{y}) \geq -\frac{1}{2}$, vilket antas

t.ex i $(y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 0)$,

dvs i $\underline{f}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Största vinkeln uppfylls då

$$\cos\varphi = -\frac{1}{2},$$

vilket ger $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ $(=120°)$.