Linjär Algebra

Ekvationssystem

Jonathan Nilsson

Linköpings Universitet

Idag

- Registrering
- Kursinformation
- Feedback från förra kursomgången
- Ekvationssystem
  - Vad är ett ekvationssystem?
  - Tillämpningar
  - Olika typer av lösningsmängder
  - Geometrisk tolkning
  - Successiv elimination

Kursinformation

Kurs: ETE325 Linjär algebra, VT2023, 8hp

Examinator: Jonathan Nilsson, jonathan.nilsson@liu.se, kontor 3A:642

Kurshemsida: `https://courses.mai.liu.se/GU/ETE325`

Kurslitteratur: Ulf Janfalk: *Linjär algebra*, samt tillhörande övningshäfte.

Undervisningsformer: Pass med föreläsningar och räkneövningar, samt självstudier.

Examination: Tentamen den 29 maj. Betyg U,3,4,5. Omtentamen finns i augusti och januari. Två frivilliga inlämningsuppgifter kan ge bonuspoäng till tentamen.

Kursinnehåll: Linjära ekvationssystem. Geometriska vektorer, räta linjer och plan. Matriser. Linjära rum. Euklidiska rum. Determinanter. Linjära avbildningar. Egenvärden och egenvektorer. Symmetriska avbildningar. Kvadratiska former. System av differentialekvationer och differensekvationer.

Feedback från förra kursomgången

Om förra kursomgången VT2022:

- Kursdeltagare: ca 40
- Antal som svarade på kursvärderingen: 1
- Inga särskilda klagomål enligt förra kursansvarig

Feedback från förra kursomgången

Om förra kursomgången VT2022:

- Kursdeltagare: ca 40
- Antal som svarade på kursvärderingen: 1
- Inga särskilda klagomål enligt förra kursansvarig

Om årets kursomgång:

- Ny examinator
- Föreläsningsdel på varje pass
- Viss ändrig i rekommendarede övningsuppgifter, flera satta inom parentes
- Mer videomaterial från tidigare kursomgångar finns tillgängligt på kurshemsidan
- Formatet på de frivilliga inlämningsuppgifterna modifieras

Del I

Linjära ekvationssystem

En linjär ekvation

$$3x + 2y - 5z = 21$$

är ett exempel på en linjär ekvation i variablerna x, y, z.

En linjär ekvation

$$3x + 2y - 5z = 21$$

är ett exempel på en linjär ekvation i variablerna x, y, z.

Till exempel håller ekvationen när $x = 3,\ y = 1,\ z = -2$.

En linjär ekvation

$$3x + 2y - 5z = 21$$

är ett exempel på en linjär ekvation i variablerna x, y, z.

Till exempel håller ekvationen när $x = 3,\ y = 1,\ z = -2$.
En annan möjlighet är $x = 7,\ y = 0,\ z = 0$. Det finns många fler!

Linjära ekvationer

Definition

En **linjär ekvation** är en ekvation som kan skrivas på formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

där $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är variabler, och $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ är reella tal.

Linjära ekvationer

Definition

En **linjär ekvation** är en ekvation som kan skrivas på formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

där $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är variabler, och $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ är reella tal.

Exempel på linjära ekvationer:

$$x - 3y + 3z + 2w = -5 \qquad\qquad 5x_1 - 2\sqrt{3}x_2 = 0$$

$$3x = 5 \qquad \pi x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 0.73x_3 = 8$$

Linjära ekvationer

Definition

En **linjär ekvation** är en ekvation som kan skrivas på formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

där $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är variabler, och $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ är reella tal.

Exempel på linjära ekvationer:

$$x - 3y + 3z + 2w = -5 \qquad\qquad 5x_1 - 2\sqrt{3}x_2 = 0$$

$$3x = 5 \qquad \pi x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 0.73x_3 = 8$$

Ekvationen $2x + 3y^2 = 6$ är ett exempel på en ekvation som **inte** är linjär.

System av linjära ekvationer

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ -x + 2y - 2z = -4 \end{cases}$$

Är ett exempel på ett linjärt ekvationssystem med två ekvationer och tre variabler, ett 2×3-system.

System av linjära ekvationer

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ -x + 2y - 2z = -4 \end{cases}$$

Är ett exempel på ett linjärt ekvationssystem med två ekvationer och tre variabler, ett 2×3-system.

En **lösning** till ett ekvationssystem består av värden för de olika variablerna så att alla ekvationerna blir uppfyllda samtidigt.

System av linjära ekvationer

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ -x + 2y - 2z = -4 \end{cases}$$

Är ett exempel på ett linjärt ekvationssystem med två ekvationer och tre variabler, ett 2×3-system.

En **lösning** till ett ekvationssystem består av värden för de olika variablerna så att alla ekvationerna blir uppfyllda samtidigt.

Till exempel är $(x, y, z) = (2, 0, 1)$ en lösning till systemet ovan.
(det finns många andra lösningar)

Del II

Tillämpningar

Tillämpningar

Varför ska vi lära oss att lösa linjära ekvationssystem?

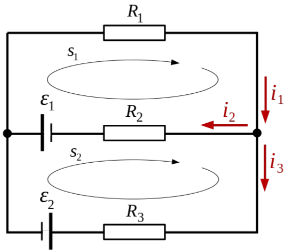
Tillämpningar

Varför ska vi lära oss att lösa linjära ekvationssystem?

Linjära ekvationsysstem förekommer inom alla brancher av teknik och vetenskap.

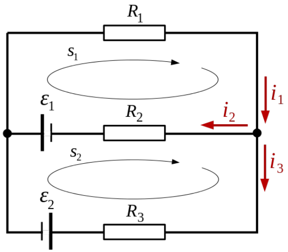
Här följer ett par exempel som motivation - detaljerna är inte så viktiga.

Antag att vi i kretsen nedan har $R_1 = 100$ Ohm, $R_2 = 200$ Ohm, $R_3 = 300$ Ohm, $\varepsilon_1 = 3$ Volt, $\varepsilon_2 = 4$ Volt. Bestäm strömmarna i_1, i_2, och i_3 (i ampere).



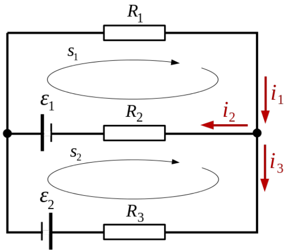
Elektronik

Antag att vi i kretsen nedan har $R_1 = 100$ Ohm, $R_2 = 200$ Ohm, $R_3 = 300$ Ohm, $\varepsilon_1 = 3$ Volt, $\varepsilon_2 = 4$ Volt. Bestäm strömmarna i_1, i_2, och i_3 (i ampere).



Vi får svaret genom att lösa följande ekvationssystem:
$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ 100i_1 + 200i_2 = 3 \\ 200i_2 - 300i_3 = 7 \end{cases}$$

Antag att vi i kretsen nedan har $R_1 = 100$ Ohm, $R_2 = 200$ Ohm, $R_3 = 300$ Ohm, $\varepsilon_1 = 3$ Volt, $\varepsilon_2 = 4$ Volt. Bestäm strömmarna i_1, i_2, och i_3 (i ampere).



Vi får svaret genom att lösa följande ekvationssystem:
$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ 100 i_1 + 200 i_2 = 3 \\ 200 i_2 - 300 i_3 = 7 \end{cases}$$

Lösningen är $(i_1, i_2, i_3) = (\frac{231}{4100}, \frac{7}{1025}, \frac{203}{4100})$ (ampere)

Kemi

När metan brinner så bildas koldioxid och vatten:

$$CH_4 + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$$

Vad är förhållandena mellan antalet molekyler av var typ?

Kemi

När metan brinner så bildas koldioxid och vatten:

$$CH_4 + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$$

Vad är förhållandena mellan antalet molekyler av var typ?

Antag att den *balanserade ekvationen* är

$$a\,CH_4 + b\,O_2 \longrightarrow c\,CO_2 + d\,H_2O$$

Kemi

När metan brinner så bildas koldioxid och vatten:

$$\mathrm{CH_4} + \mathrm{O_2} \longrightarrow \mathrm{CO_2} + \mathrm{H_2O}$$

Vad är förhållandena mellan antalet molekyler av var typ?

Antag att den *balanserade ekvationen* är

$$a\,\mathrm{CH_4} + b\,\mathrm{O_2} \longrightarrow c\,\mathrm{CO_2} + d\,\mathrm{H_2O}$$

Räknar vi atomer till vänster och höger får vi:

$$\begin{array}{r} \text{Väte:} \\ \text{Syre:} \\ \text{Kol:} \end{array} \begin{cases} 4a = 2d \\ 2b = 2c + d \\ a = c \end{cases}$$

Kemi

Systemet, som kan skrivas

$$\begin{cases} 4a & & & -2d = 0 \\ & 2b & -2c & -\ \ d = 0 \\ a & & -\ \ c & = 0 \end{cases}$$

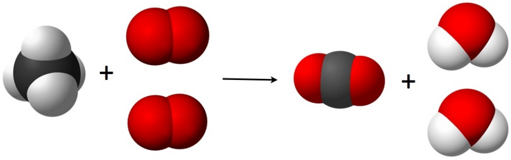
är uppfyllt när $(a, b, c, d) = (1, 2, 1, 2)$.

Kemi

Systemet, som kan skrivas

$$\begin{cases} 4a \phantom{{}+2b-2c} - 2d = 0 \\ \phantom{4a+{}} 2b - 2c - d = 0 \\ a \phantom{{}+2b} - c \phantom{{}-2d} = 0 \end{cases}$$

är uppfyllt när $(a, b, c, d) = (1, 2, 1, 2)$.



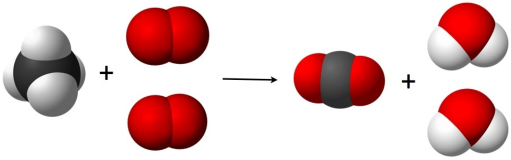
$$CH_4 + 2O_2 \longrightarrow CO_2 + 2H_2O$$

Kemi

Systemet, som kan skrivas

$$\begin{cases} 4a \phantom{{}+2b-2c} - 2d = 0 \\ \phantom{4a+{}} 2b - 2c - d = 0 \\ a \phantom{{}+2b} - c \phantom{{}-2d} = 0 \end{cases}$$

är uppfyllt när $(a, b, c, d) = (1, 2, 1, 2)$.



$$CH_4 + 2O_2 \longrightarrow CO_2 + 2H_2O$$

I själva verket har systemet oändligt många lösningar: för varje tal t så får vi en lösning $(a, b, c, d) = (t, 2t, t, 2t)$, vår lösning ovan motsvarar $t = 1$.

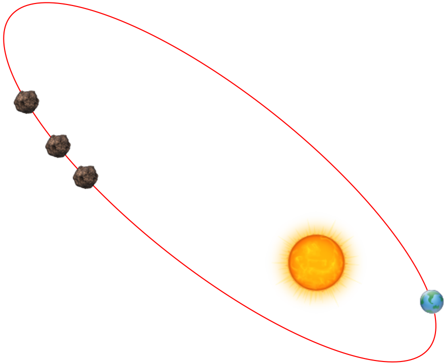
Bestämma en ellips

Ligger de fyra svarta punkterna på en ellips med fokus i den röda punkten?

En ellips kan skrivas som en ekvation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. Koefficienterna a, b, c, d, e, f kan hittas genom att lösa ett linjärt ekvationssystem.

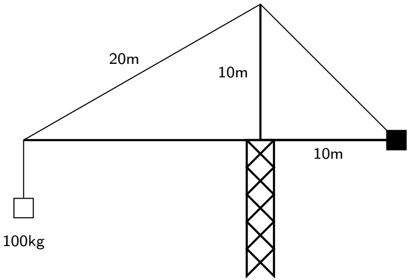
Astronomi

Ligger de fyra svarta punkterna på en ellips med fokus i den röda punkten?



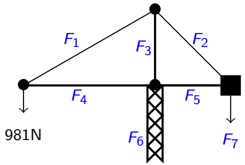
En ellips kan skrivas som en ekvation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. Koefficienterna a, b, c, d, e, f kan hittas genom att lösa ett linjärt ekvationssystem.

Vi har en lyftkran:

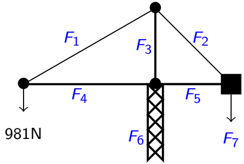


Hur tung ska motvikten vara? Hur stora dragspänningar blir det i kranens olika delar?

Vi introducerar variabler för dragspänningarna:



Vi introducerar variabler för dragspänningarna:

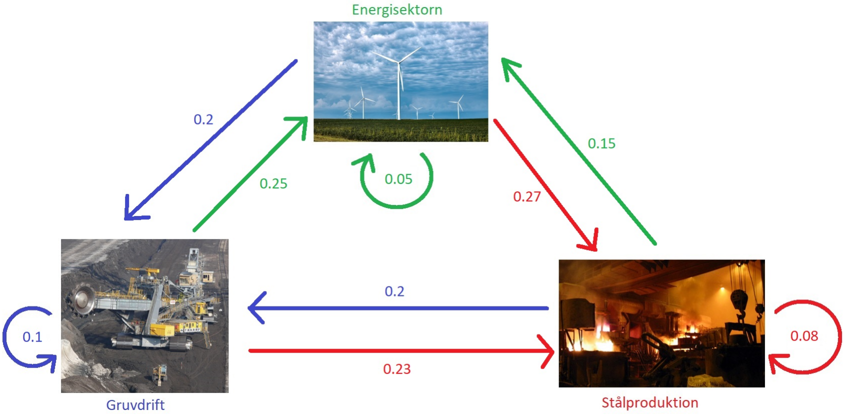


Nettokraften i var och en av de fyra noderna måste bli noll horisontellt och vertikalt. Detta ger ett system av åtta ekvationer:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}F_1 - F_4 = 0 \\ \frac{1}{2}F_1 = 981 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}F_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 = 0 \\ -\frac{1}{2}F_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 + F_3 = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}F_2 + F_5 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 - F_7 = 0 \\ F_4 - F_5 = 0 \\ -F_3 + F_6 = 0 \end{cases}$$

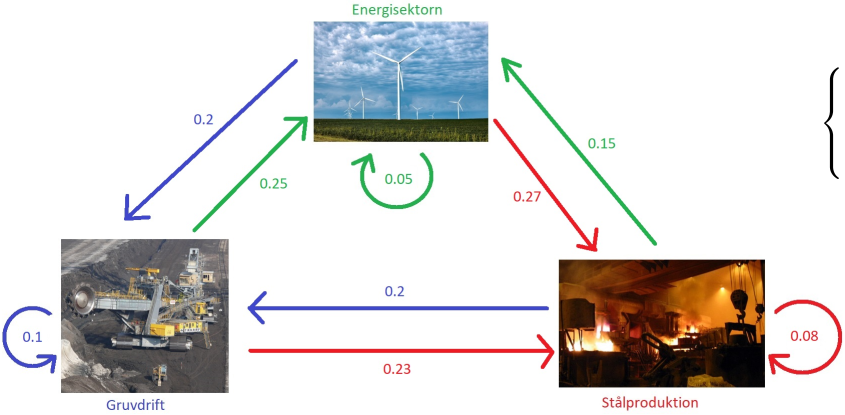
Ekonomi

Hur mycket ska varje sektor omsätta om man vill producera stål värt 1 miljon kronor? Wassily Leontief fick Nobelpris i ekonomi 1973 för att ha visat att sådana problem kan lösas med hjälp av ekvationssystem.



Ekonomi

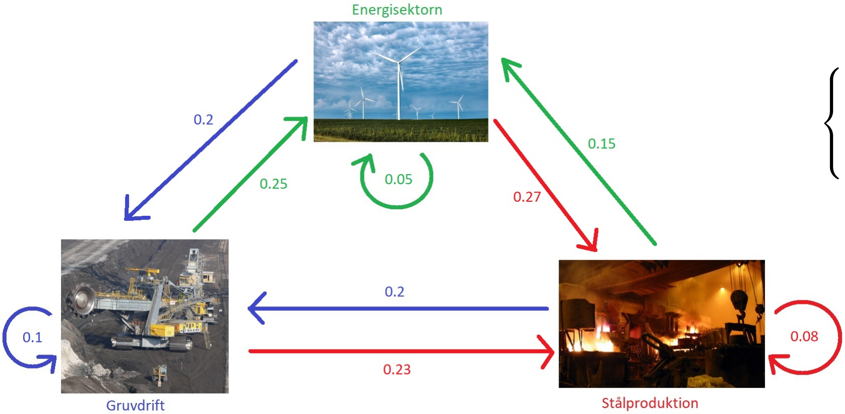
Hur mycket ska varje sektor omsätta om man vill producera stål värt 1 miljon kronor? Wassily Leontief fick Nobelpris i ekonomi 1973 för att ha visat att sådana problem kan lösas med hjälp av ekvationssystem.



$$\begin{cases} 0.9x - 0.2y - 0.2z = 0 \\ -0.25x + 0.95y - 0.15z = 0 \\ -0.23x - 0.27y + 0.92z = 1 \end{cases}$$

Ekonomi

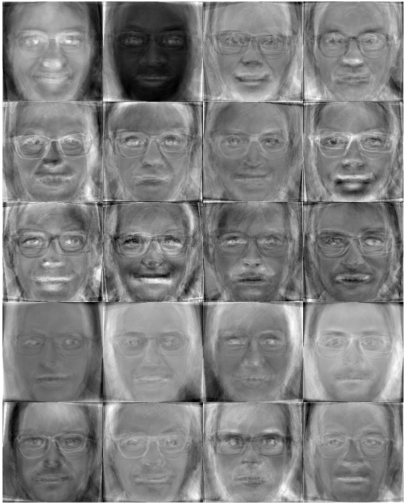
Hur mycket ska varje sektor omsätta om man vill producera stål värt 1 miljon kronor? Wassily Leontief fick Nobelpris i ekonomi 1973 för att ha visat att sådana problem kan lösas med hjälp av ekvationssystem.



$$\begin{cases} 0.9x - 0.2y - 0.2z = 0 \\ -0.25x + 0.95y - 0.15z = 0 \\ -0.23x - 0.27y + 0.92z = 1 \end{cases}$$

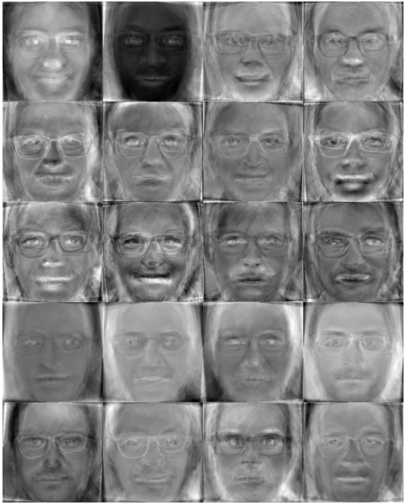
$$\begin{cases} x = 0.34 \\ y = 0.29 \quad \text{(mkr)} \\ z = 1.26 \end{cases}$$

Ansiktsigenkänning



En metod för ansiktsigenkänning bygger på att räkna ut egenansikten från en mängd kända ansikten (här 100 MAI-anställda). Egenansiktena är lämpliga för att kombineras och jämföras med andra ansikten.

Varje egenansikte till vänster har beräknats genom att lösa ett 22500×22500-ekvationssystem.



En metod för ansiktsigenkänning bygger på att räkna ut egenansikten från en mängd kända ansikten (här 100 MAI-anställda). Egenansiktena är lämpliga för att kombineras och jämföras med andra ansikten.

Varje egenansikte till vänster har beräknats genom att lösa ett 22500×22500-ekvationssystem.

Genomsnittsliga ansiktet:

Datorgrafik - isometriskt perspektiv

I ett 3d-spel har objekt i spelvärlden tre koordinater (x, y, z). När objektet ska ritas på skärmen behöver dessa koordinater omvandlas till skärmkoordinater (a, b). I ett isometriskt perspektiv ges detta koordinatsamband av ekvationsystemet

$$\begin{cases} -\sqrt{3}x + \sqrt{3}y = 2a \\ -x - y + 2z = 2b \end{cases}$$

Del III

Lösningsmängder

Tre typer av lösningsmängd

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Tre typer av lösningsmängd

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

har **exakt en** lösning,
nämligen $(x, y) = (3, 2)$.

Tre typer av lösningsmängd

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

har **exakt en** lösning,
nämligen $(x, y) = (3, 2)$.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Tre typer av lösningsmängd

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

har **exakt en** lösning, nämligen $(x, y) = (3, 2)$.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Saknar lösningar.

Tre typer av lösningsmängd

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

har **exakt en** lösning, nämligen $(x, y) = (3, 2)$.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Saknar lösningar.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$$

Tre typer av lösningsmängd

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

har **exakt en** lösning,
nämligen $(x, y) = (3, 2)$.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Saknar lösningar.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$$

har **oändligt många** lösningar:
för varje tal t blir
$(x, y) = (5 - 2t, t)$ en lösning.

Geometrisk tolkning

Låt oss visualisera lösningen till

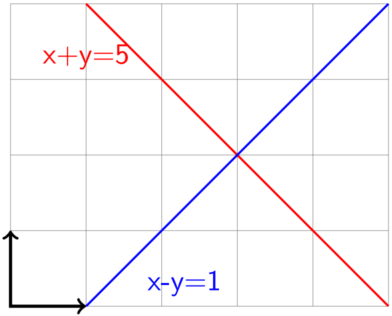
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Geometrisk tolkning

Låt oss visualisera lösningen till

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

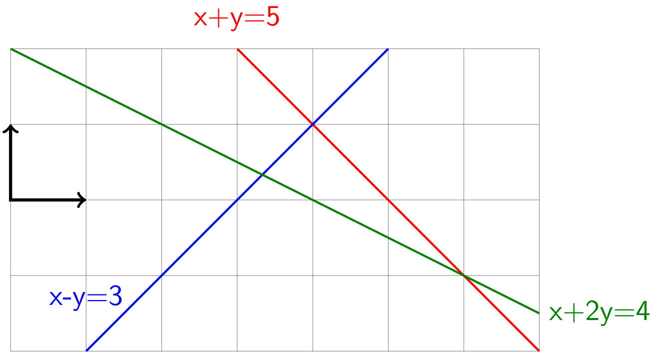
Lösningen till var ekvation blir en linje i (x, y)-planet, så lösningen till systemet är skärningen mellan dessa linjer.



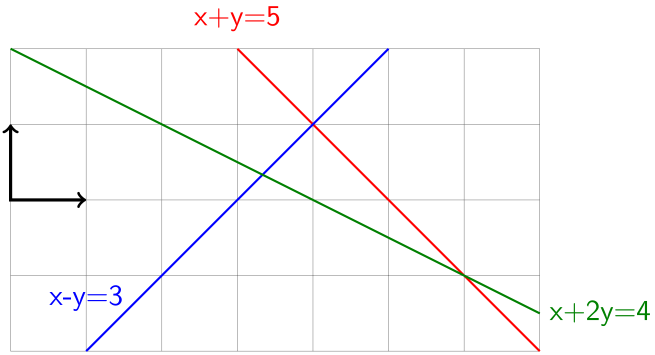
Geometrisk tolkning

Nu ritar vi en linje för var ekvation i systemet $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

Nu ritar vi en linje för var ekvation i systemet $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$



Nu ritar vi en linje för var ekvation i systemet $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$



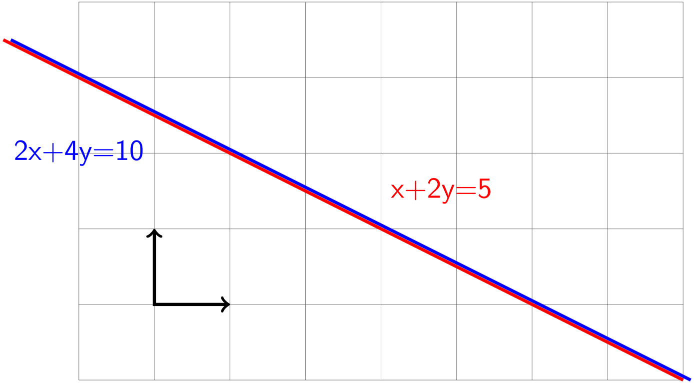
Lösningar saknas! Ingen punkt ligger på alla tre linjerna.

Geometrisk tolkning

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$$

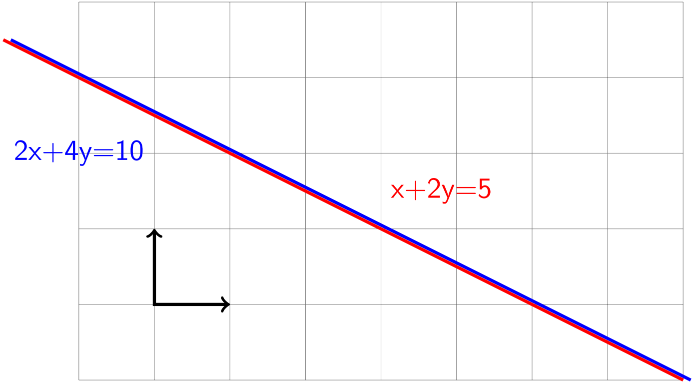
Geometrisk tolkning

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$$



Geometrisk tolkning

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$$



Linjerna sammanfaller, oändligt många lösningar!

Del IV

Successiv Elimination

Att lösa linjära ekvationssystem

Det finns en algoritm som kallas **successiv elimination** (eller Gauss-elimination) som kan användas för att lösa alla linjära ekvationssysten.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Det finns en algoritm som kallas **successiv elimination** (eller Gauss-elimination) som kan användas för att lösa alla linjära ekvationssysten.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Han var dock inte först med att upptäcka metoden. Var och en av de stora flod-civilisationerna i Mesopotamien, Egypten, Indien, och Kina upptäckte oberoende av varandra metoden.

Idén

Antag att (x, y) är två tal som löser bägge ekvationerna

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

Idén

Antag att (x, y) är två tal som löser bägge ekvationerna

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

Då löser (x, y) också summan av ekvationerna

$$\begin{cases} 3x + 4y = 15 \end{cases}$$

Idén

Antag att (x, y) är två tal som löser bägge ekvationerna

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

Då löser (x, y) också summan av ekvationerna

$$\begin{cases} 3x + 4y = 15 \end{cases}$$

Motsatsen är dock inte sann: det finns många lösningar till $3x + 4y = 15$ som inte löser det första systemet.

Exempel

Betrakta systemet

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}.$$

Om vi istället ersätter den andra raden med summan av de ursprungliga ekvationerna får vi

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x + 4y = 15 \end{cases}.$$

Exempel

Betrakta systemet

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}.$$

Om vi istället ersätter den andra raden med summan av de ursprungliga ekvationerna får vi

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x + 4y = 15 \end{cases}.$$

Dessa två system har samma *lösningsmängd*, vi säger att systemen är ekvivalenta och vi skriver

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 7 \\ 3x + 4y = 15 \end{cases}$$

Definition

Två linjära ekvationssystem är **ekvivalenta**
om de har samma mängd lösningar.

Addera en multipel av en rad till en annan rad

Det är också klart att vi kan multiplicera en rad med ett nollskilt tal, eller byta ordningen på ekvationer utan att ändra lösningsmängden:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x + 4y = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x - 3y = -21 \\ 3x + 4y = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 4y = 15 \\ -3x - 3y = -21 \end{cases}.$$

Addera en multipel av en rad till en annan rad

Det är också klart att vi kan multiplicera en rad med ett nollskilt tal, eller byta ordningen på ekvationer utan att ändra lösningsmängden:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x + 4y = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x - 3y = -21 \\ 3x + 4y = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 4y = 15 \\ -3x - 3y = -21 \end{cases}.$$

Vi kan också addera en multipel av en rad till en annan utan att förändra lösningsmängden:

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x - 2y - 4z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 7 \\ 4x + y - z = 26 \end{cases}$$

Elementära radoperationer

Radoperationer

De tre elementära radoperationerna man kan genomföra på ett ekvationsysstem är:

- Lägg till en multipel av en rad till en annan
- Multiplicera en rad med ett nollskilt tal
- Byta plats på två rader

Om vi kan transformera ett system till ett annat med en sekvens radoperationer så är systemen ekvivalenta!

Idén

Idén bakom Gauss-elimination är att använda rad-operationer för att reducera ett system till enklast möjliga form.

Idén

Idén bakom Gauss-elimination är att använda rad-operationer för att reducera ett system till enklast möjliga form.
Ett exempel:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 10 \\ - 2y = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 10 \\ \phantom{x+{}} y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \phantom{{}+y} = 8 \\ \phantom{x+{}} y = 2 \end{cases}$$

Notation för radoperationer

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \overset{3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 5x + 5y = 6 \end{cases}$$

Notation för radoperationer

$$\begin{cases} x + 2y = 1 & ③ \\ 2x - y = 3 & \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 5x + 5y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 1 & \boxed{7} \\ 2x - y = 3 & \end{cases} \iff \begin{cases} 7x + 14y = 7 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Notation för radoperationer

$$\begin{cases} \;\;x + 2y = 1 \\ 2x - \;\;y = 3 \end{cases} \; 3 \iff \begin{cases} \;\;x + 2y = 1 \\ 5x + 5y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \;\;x + 2y = 1 \\ 2x - \;\;y = 3 \end{cases} \; \boxed{7} \iff \begin{cases} 7x + 14y = 7 \\ 2x - \;\;\;\;y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \;\;x + 2y = 1 \\ 2x - \;\;y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - \;\;y = 3 \\ \;\;x + 2y = 1 \end{cases}$$

Successiv elimination

Strategi

- Använd första variabeln i översta ekvationen för att eliminera den ur alla ekvationer under den.

Successiv elimination

Strategi

- Använd första variabeln i översta ekvationen för att eliminera den ur alla ekvationer under den.
- Använd den nya ekvationen på rad två rad två för att eliminera nästa variabel ur alla ekvationer under den.

Successiv elimination

Strategi

- Använd första variabeln i översta ekvationen för att eliminera den ur alla ekvationer under den.
- Använd den nya ekvationen på rad två rad två för att eliminera nästa variabel ur alla ekvationer under den.
- Upprepa tills du får slut på variabler eller ekvationer.

Successiv elimination

Strategi

- Använd första variabeln i översta ekvationen för att eliminera den ur alla ekvationer under den.
- Använd den nya ekvationen på rad två rad två för att eliminera nästa variabel ur alla ekvationer under den.
- Upprepa tills du får slut på variabler eller ekvationer.

Resultatet blir ett "trappformat" ekvationssystem som är lätt att lösa.

Ett Trappformat system

$$\begin{cases} \bullet & * & * & * & * & * & = * \\ & \bullet & * & * & * & * & = * \\ & & \bullet & * & * & * & = * \\ & & & \bullet & * & * & = * \\ & & & & \bullet & * & = * \\ & & & & & \bullet & = * \end{cases}$$

Ett Trappformat system

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccccccc}
\bullet & * & * & * & * & * & * & * & * & = & * \\
 & \bullet & * & * & * & * & * & * & * & = & * \\
 & & & \bullet & * & * & * & * & * & = & * \\
 & & & & & & \bullet & * & * & = & * \\
 & & & & & & & \bullet & * & = & *
\end{array}
\right.
$$

Ett första exempel

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 5y + 8z = 11 \\ -x + y + 5z = -4 \end{cases}$$

Ett första exempel

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 & -2 \quad 1 \\ 2x + 5y + 8z = 11 & \\ -x + y + 5z = -4 & \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ y + 2z = 1 \\ 3y + 8z = 1 \end{cases}$$

Ett första exempel

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 & -2 \quad 1 \\ 2x + 5y + 8z = 11 \\ -x + y + 5z = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ y + 2z = 1 & -3 \\ 3y + 8z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ y + 2z = 1 \\ 2z = -2 \end{cases}$$

Ett första exempel

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 & \text{-2} \quad 1 \\ 2x + 5y + 8z = 11 \\ -x + y + 5z = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ y + 2z = 1 & \text{-3} \\ 3y + 8z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ y + 2z = 1 \\ 2z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$$

Ett andra exampel

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Ett andra exampel

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ -3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}\right. \quad -2 \quad 3 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ & - & 5x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \\ & & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 7 \end{array}\right.$$

Ett andra exampel

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 & -2 \quad 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -5x_2 + 4x_3 = -1 \\ 7x_2 - 4x_3 = 7 & \boxed{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -5x_2 + 4x_3 = -1 \\ 35x_2 - 20x_3 = 35 \end{cases}$$

Ett andra exampel

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 & -2 \quad 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -5x_2 + 4x_3 = -1 \\ 7x_2 - 4x_3 = 7 & \boxed{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -5x_2 + 4x_3 = -1 & 7 \\ 35x_2 - 20x_3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -5x_2 + 4x_3 = -1 \\ 8x_3 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 3 \\ x_3 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Ett tredje exempel

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -x + 2y - 3z = -2 \\ 3x - y - z = 5 \end{cases}$$

Ett tredje exempel

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -x + 2y - 3z = -2 \\ 3x - y - z = 5 \end{cases} \begin{matrix} 1 & -3 \\ & \\ & \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ y - 2z = 1 \\ 2y - 4z = -4 \end{cases} \begin{matrix} \\ -2 \\ \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ y - 2z = 1 \\ 0 = -6 \end{cases}$$

Ett tredje exempel

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -x + 2y - 3z = -2 \\ 3x - y - z = 5 \end{cases} \begin{matrix} 1 & -3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ y - 2z = 1 \\ 2y - 4z = -4 \end{cases} -2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ y - 2z = 1 \\ 0 = -6 \end{cases}$$

Systemet **saknar lösningar** eftersom $0 \neq -6$.

Ett fjärde exampel

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -x + 2y - 3z = -2 \\ 3x - y - z = 11 \end{cases}$$

Ett fjärde exempel

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -x + 2y - 3z = -2 \\ 3x - y - z = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ y - 2z = 1 \\ 2y - 4z = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ y - 2z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$$

Ett fjärde exampel

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -x + 2y - 3z = -2 \\ 3x - y - z = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ y - 2z = 1 \\ 2y - 4z = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ y - 2z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$$

Eftersom sista ekvationen har två variabler finns det oändligt många lösningar. Låt t vara ett godtyckligt tal och sätt $z = t$. Då får vi $y = 1 + 2t$, och $x = y - z + 3 = 4 + t$.
Mängden lösningar kan alltså skrivas $(x, y, z) = (4 + t, 1 + 2t, t)$ där $t \in \mathbb{R}$.

Ett femte exempel

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \phantom{{}+x_3} \phantom{{}+x_4} + 3x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 - 6x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 + 8x_5 = 3 \end{cases}$$

Ett femte exempel

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2   + 3x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_4 + 8x_5 = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} -1 & -2 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_5 = 1 \\ x_3 - x_5 = 2 \\ x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

Ett femte exempel

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_4 + 8x_5 = 3 \end{cases} \quad \text{-1} \quad \text{-2} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_5 = 1 \\ x_3 - x_5 = 2 \\ x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

Lösning:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1 + 3s - 3t, s, 2 + t, 1 - 2t, t) \qquad \text{där } s, t \in \mathbb{R}$$

Ett sjätte exempel

Lös systemet nedan för varje värde av parametern $a \in \mathbb{R}$!

$$\begin{cases} x - ay = 1 \\ ax - y = a^2 \end{cases}$$

Ett sjätte exempel

Lös systemet nedan för varje värde av parametern $a \in \mathbb{R}$!

$$\begin{cases} x - ay = 1 \\ ax - y = a^2 \end{cases} \overset{-a}{\iff} \begin{cases} x - ay = 1 \\ (a^2 - 1)y = a^2 - a \end{cases}$$

Om $a \neq \pm 1$ får vi en enda lösning: $y = \frac{a}{a+1}$ och $x = \frac{a^2+a+1}{a+1}$.

Ett sjätte exempel

Lös systemet nedan för varje värde av parametern $a \in \mathbb{R}$!

$$\begin{cases} x - ay = 1 & -a \\ ax - y = a^2 & \end{cases} \iff \begin{cases} x - ay = 1 \\ (a^2 - 1)y = a^2 - a \end{cases}$$

Om $a \neq \pm 1$ får vi en enda lösning: $y = \frac{a}{a+1}$ och $x = \frac{a^2+a+1}{a+1}$.

Annars, om $a = -1$ blir den andra ekvationen $0y = 2$, så systemet saknar lösning.

Ett sjätte exempel

Lös systemet nedan för varje värde av parametern $a \in \mathbb{R}$!

$$\begin{cases} x - ay = 1 \\ ax - y = a^2 \end{cases} \overset{-a}{} \iff \begin{cases} x - ay = 1 \\ (a^2 - 1)y = a^2 - a \end{cases}$$

Om $a \neq \pm 1$ får vi en enda lösning: $y = \frac{a}{a+1}$ och $x = \frac{a^2+a+1}{a+1}$.

Annars, om $a = -1$ blir den andra ekvationen $0y = 2$, så systemet saknar lösning.

Och om $a = 1$ blir den andra ekvationen $0y = 0$, så systemet har oändligt många lösningar: $(x, y) = (1 + t, t)$ där $t \in \mathbb{R}$.

Extra videomaterial

Missat föreläsningen eller behöver repetera i egen takt?
Dagens material täcks in av de första 5 videoklippen här:

Föreläsningsklipp