Inlämningsuppgift I

Linjär algebra · ETE325 · VT2023 · Jonathan Nilsson

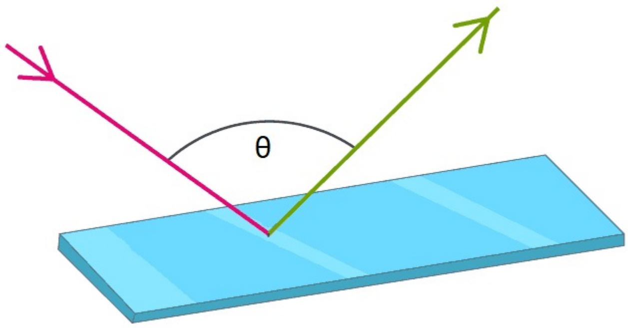
Instruktioner: Skriv tydligt namn, personnummer, och program (om du går ett) på första sidan. Uppgifterna ska lösas självständigt och utan digitala hjälpmedel. Skriv fullständiga lösningar med tydliga svar. Skriv lösningarna för hand, använd inte rödpenna. Skriv max en uppgift per sida och lämna in uppgifterna i nummerordning.

Lämnas in: Senast klockan 18.00 den 3/4 2023. Lämna helst in ihophäftat i pappersform på föreläsningen. Lösningarna kan annars lämnas i mitt fack i B huset, i korridoren mellan ingång 21 och 23 en trappa upp. En tredje möjlighet är att maila lösningarna i **en enda pdf fil** till jonathan.nilsson@liu.se. Lösningar publiceras på kurshemsidan direkt efteråt, så sena inlämningar accepteras ej.

Bonuspoäng till tentan: Dessa inlämningsuppgifter är **inte obligatoriska** men de ger gemensamt $0-2$ bonuspoäng till kursens tentamen. Varje uppgift nedan bedöms som 0-3 poäng, så total maxpoäng på inlämningsuppgifterna är $15+15=30$ poäng. En total poängsumma på 16 ger 1 bonuspoäng, och en poängsumma på 24 ger 2 bonuspoäng. Dessa bonuspoäng kan användas vid kursens tre examenstillfällen, i maj 2023, augusti 2023, och januari 2024.

1. Låt $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-3\end{pmatrix}$ och $B=\begin{pmatrix}6&2\\2&1\end{pmatrix}$ och $C=\begin{pmatrix}2&2&4\\1&2&3\\2&3&6\end{pmatrix}$.
   (a) Beräkna determinanterna av A, B, och C.
   (b) Hitta inversen till C.
   (c) Lös matrisekvationen $BX+I=2X+AX+A$.

2. En ljusstråle färdas längs linjen $(x,y,z)=(-4+3t,-5+2t,1+t)$ där $t\in\mathbb{R}$. Strålen reflekteras i planet med ekvation $x+2y-z=3$. Ta fram en parameterform för den reflekterade strålen. Ange också vinkeln θ mellan den infallande strålen och den reflekterade strålen.



3. Låt $M=\begin{pmatrix}1&2&4&1&6\\1&2&-1&6&1\\1&2&1&4&3\end{pmatrix}$
   (a) Lös ekvationssystemet $MX=\mathbf{0}$. Här är X alltså som vanligt en kolonnmatris $X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^t$.
   (b) Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet av $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av kolonnerna i M. Ange dimensionen för $\mathbb{U}$ och välj en bas för $\mathbb{U}$.
   (c) Vektorn $\mathbf{v}=(\frac{7}{2},-4,-1)$ tillhör $\mathbb{U}$. Ange koordinaterna för $\mathbf{v}$ i den bas du valde i föregående deluppgift.

4. En parallellepiped ges av

$$\mathcal{P} = \{x_1(1,0,3) + x_2(1,1,2) + x_3(-1,1,1)\ ;\ 0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1\},$$

alltså mängden linjärkombinationer av de tre vektorerna där alla koefficienter ligger mellan 0 och 1.

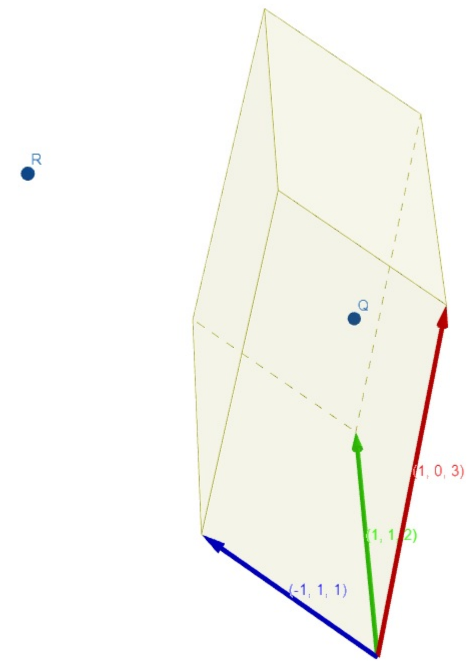
(a) Beräkna parallellepipedens volym.

(b) Ligger punkten $Q = (1,1,3)$ innuti parallellepipeden?

(c) Antag att parallellepipeden är ogenomskinlig. Hur många av parallellepipedens sex sidor är synliga från punkten $R = (-2,2,4)$? Och vilka av sidorna?

☞ *Tips: Inför ett nytt koordinatsystem där basvektorerna är de tre vektorerna i definitionen av $\mathcal{P}$, uttryck sedan Q och R i det nya koordinatsystemet. Jämför med Exempel 5.6.2 på sidan 131 i kursboken.*

☞ På `https://www.geogebra.org/3d/qjh5kew7` kan du se om dina svar ser ut att stämma, men din lösning får inte baseras på denna visualisering.



5. Vi definierar en *"magisk kvadrat"* som en kvadratisk matris där summan i varje rad och varje kolonn blir lika. Matriserna A, B, och C nedan är alltså alla magiska kvadrater med respektive summor 7, 15, och 3. Notera att summan av diagonalerna inte behöver vara lika.

$$A = \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 3 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array} \qquad B = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 8 & 1 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 7 \\ \hline 4 & 9 & 2 \\ \hline\end{array} \qquad C = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

(a) Visa att mängden M_n av alla magiska $n \times n$ kvadrater är ett underrum till vektorrummet av alla $n \times n$-matriser.

(b) Ange dimensionen för M_2, rummet av 2×2 magiska kvadrater, och ta fram en bas för M_2. Ange koordinaterna för matrisen A ovan i den bas du valt.

(c) ⚔ Ange dimensionen för M_3, rummet av 3×3 magiska kvadrater, och ta fram en bas för M_3. Ange koordinaterna för matriserna B och C ovan i den bas du valt. ☞ *Tips: För att skapa en magisk kvadrat kan man välja en rad/kolonn-summa och sedan välja kvadatens fyra hörn fritt. Hur måste resten av kvadraten se ut?*