Linjär Algebra

Abstrakta vektorrum

Jonathan Nilsson

Linköpings Universitet

Vektorrum

Definition

Ett **vektorrum** är en mängd V utrustad med en additionsoperation ($\overline{u}, \overline{v} \in V \Rightarrow \overline{u} + \overline{v} \in V$) och en skalärmutiplikation ($\overline{v} \in V,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \overline{v} \in V$) som uppfyller följande axiom för alla **vektorer** $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V$ och alla **skalärer** $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

- $\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$
- $(\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w} = \overline{u} + (\overline{v} + \overline{w})$
- Det finns en *nollvektor* $\overline{0}$ i V så att $\overline{0} + \overline{v} = \overline{v}$ för alla $\overline{v} \in V$
- För varje $\overline{v} \in V$ finns det ett element $-\overline{v} \in V$ så att $\overline{v} + (-\overline{v}) = \overline{0}$
- $1 \cdot \overline{v} = \overline{v}$
- $\lambda \cdot (\mu \cdot \overline{v}) = (\lambda\mu) \cdot \overline{v}$
- $\lambda \cdot (\overline{u} + \overline{v}) = (\lambda \cdot \overline{u}) + (\lambda \cdot \overline{v})$
- $(\lambda + \mu) \cdot \overline{v} = (\lambda \cdot \overline{v}) + (\mu \cdot \overline{v})$

Exempel på vektorrum

Exempel på vektorrum:

- $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
  med addition $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ och $\lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, \lambda y)$.

Exempel på vektorrum

Exempel på vektorrum:

- $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
  med addition $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ och $\lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, \lambda y)$.
- $V = \mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ med motsvarande operationer.

Exempel på vektorrum

Exempel på vektorrum:

- $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
  med addition $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ och $\lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, \lambda y)$.
- $V = \mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ med motsvarande operationer.
- $V = \mathbb{R}^n$ för varje heltal $n \geq 1$ på samma vis.

Exempel på vektorrum

Exempel på vektorrum:

- $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
  med addition $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ och $\lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, \lambda y)$.
- $V = \mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ med motsvarande operationer.
- $V = \mathbb{R}^n$ för varje heltal $n \geq 1$ på samma vis.
- $V = \mathbb{C}$, de komplexa talen.

Exempel på vektorrum

Exempel på vektorrum:

- $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
  med addition $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ och $\lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, \lambda y)$.
- $V = \mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ med motsvarande operationer.
- $V = \mathbb{R}^n$ för varje heltal $n \geq 1$ på samma vis.
- $V = \mathbb{C}$, de komplexa talen.
- $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

Exempel på vektorrum

Exempel på vektorrum:

- $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
  med addition $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ och $\lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, \lambda y)$.
- $V = \mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ med motsvarande operationer.
- $V = \mathbb{R}^n$ för varje heltal $n \geq 1$ på samma vis.
- $V = \mathbb{C}$, de komplexa talen.
- $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.
- $V = \mathcal{P}_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, polynom av grad ≤ 2.

Exempel på vektorrum

Exempel på vektorrum:

- $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
  med addition $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ och $\lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, \lambda y)$.
- $V = \mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ med motsvarande operationer.
- $V = \mathbb{R}^n$ för varje heltal $n \geq 1$ på samma vis.
- $V = \mathbb{C}$, de komplexa talen.
- $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.
- $V = \mathcal{P}_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, polynom av grad ≤ 2.
- $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$.

Exempel på vektorrum

Exempel på vektorrum:

- $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
  med addition $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ och $\lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, \lambda y)$.
- $V = \mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ med motsvarande operationer.
- $V = \mathbb{R}^n$ för varje heltal $n \geq 1$ på samma vis.
- $V = \mathbb{C}$, de komplexa talen.
- $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.
- $V = \mathcal{P}_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, polynom av grad ≤ 2.
- $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$.

Delrum

Definition

Låt V vara ett vektorrum. En delmängd $U \subset V$ kallas för ett **delrum** (eller *underrum*) av V om följande gäller

- U är inte den tomma mängden ($U \neq \varnothing$)
- Om $\overline{u}_1$ och $\overline{u}_2$ tillhör U, så ligger även $\overline{u}_1 + \overline{u}_2$ i U
- Om $\overline{u}$ tillhör U så ligger även $\lambda \cdot \overline{u}$ i U för varje reellt tal λ

Linjärt beroende och linjärt hölje

Låt V vara ett vektorrum och låt $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ vara vektorer i V.

Definition

Låt $[\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n] = \{\lambda_1\overline{v}_1 + \lambda_2\overline{v}_2 + \cdots \lambda_n\overline{v}_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$, alltså mängden **linjärkombinationer** av vektorerna. Denna mängd kallas det **linjära höljet** av vektorerna.

Linjärt beroende och linjärt hölje

Låt V vara ett vektorrum och låt $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ vara vektorer i V.

Definition

Låt $[\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n] = \{\lambda_1\overline{v}_1 + \lambda_2\overline{v}_2 + \cdots \lambda_n\overline{v}_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$, alltså mängden **linjärkombinationer** av vektorerna. Denna mängd kallas det **linjära höljet** av vektorerna.

Om $V = [\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n]$ säger vi att vektorerna **spänner upp** V. Detta betyder att varje vektor i V kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$.

Linjärt beroende och linjärt hölje

Låt V vara ett vektorrum och låt $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_n$ vara vektorer i V.

Definition

Låt $[\overline{v}_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_n] = \{\lambda_1\overline{v}_1 + \lambda_2\overline{v}_2 + \cdots \lambda_n\overline{v}_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$, alltså mängden **linjärkombinationer** av vektorerna. Denna mängd kallas det **linjära höljet** av vektorerna.

Om $V = [\overline{v}_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_n]$ säger vi att vektorerna **spänner upp** V. Detta betyder att varje vektor i V kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_n$.

Definition

Om enda lösningen till ekvationen $\lambda_1\overline{v}_1 + \lambda_2\overline{v}_2 + \cdots \lambda_n\overline{v}_n = \overline{0}$ är att $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ så säger vi att vektorerna $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_n$ är **linjärt oberoende**.

Linjärt beroende och linjärt hölje

Låt V vara ett vektorrum och låt $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ vara vektorer i V.

Definition

Låt $[\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n] = \{\lambda_1 \overline{v}_1 + \lambda_2 \overline{v}_2 + \cdots \lambda_n \overline{v}_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$, alltså mängden **linjärkombinationer** av vektorerna. Denna mängd kallas det **linjära höljet** av vektorerna.

Om $V = [\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n]$ säger vi att vektorerna **spänner upp** V. Detta betyder att varje vektor i V kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$.

Definition

Om enda lösningen till ekvationen $\lambda_1 \overline{v}_1 + \lambda_2 \overline{v}_2 + \cdots \lambda_n \overline{v}_n = \overline{0}$ är att $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ så säger vi att vektorerna $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ är **linjärt oberoende**.

Annars, om vektorerna är linjärt beroende så går det att skriva någon av dem som en linjärkombination av de övriga.

Bas i ett vektorrum

Definition

Om vektorerna $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ *både* spänner upp V och är linjärt oberoende så säger via att $\mathcal{B} = (\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n)$ är en **bas** för V.

Bas i ett vektorrum

Definition

Om vektorerna $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ *både* spänner upp V och är linjärt oberoende så säger via att $\mathcal{B} = (\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n)$ är en **bas** för V.

Detta betyder att varje vektor $\overline{v}$ kan skrivas på ett unikt sätt som en linjärkombination av basvektorerna:

$$\overline{v} = \lambda_1 \overline{v}_1 + \lambda_2 \overline{v}_2 + \cdots \lambda_n \overline{v}_n.$$

Vi säger att $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ är **koordinaterna** för $\overline{v}$ i basen $\mathcal{B}$.

Bas i ett vektorrum

Definition

Om vektorerna $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ *både* spänner upp V och är linjärt oberoende så säger via att $\mathcal{B} = (\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n)$ är en **bas** för V.

Detta betyder att varje vektor $\overline{v}$ kan skrivas på ett unikt sätt som en linjärkombination av basvektorerna:

$$\overline{v} = \lambda_1 \overline{v}_1 + \lambda_2 \overline{v}_2 + \cdots \lambda_n \overline{v}_n.$$

Vi säger att $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ är **koordinaterna** för $\overline{v}$ i basen $\mathcal{B}$.

Dimensionen av V definieras som antalet vektorer i en bas för V.