Egenvärden och egenvektorer

Jonathan Nilsson

Del I

Egenvärden och egenvektorer

Introduktion

Om $F : V \to V$ är en linjär avbildning så pekar vanligtvis vektorerna $\mathbf{v}$ och $F(\mathbf{v})$ i *olika riktningar*.

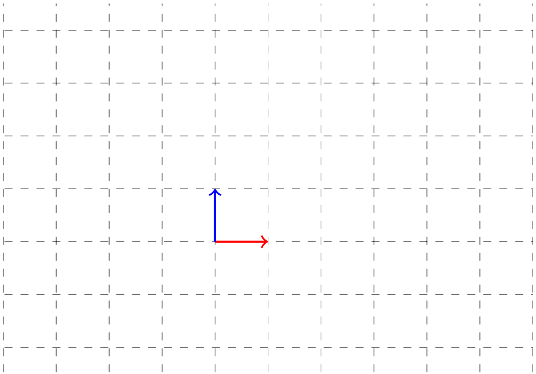
Introduktion

Om $F : V \to V$ är en linjär avbildning så pekar vanligtvis vektorerna $\mathbf{v}$ och $F(\mathbf{v})$ i *olika riktningar*.

Men det kan hända att $\mathbf{v}$ och $F(\mathbf{v})$ är parallella för vissa speciella vektorer $\mathbf{v}$. Sådana vektorer $\mathbf{v}$ kallas *egenvektorer* för avbildningen.

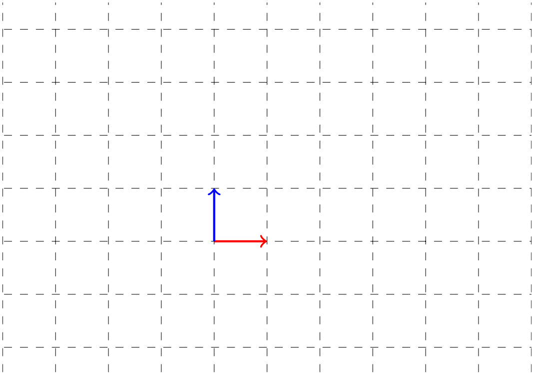
Visualisering

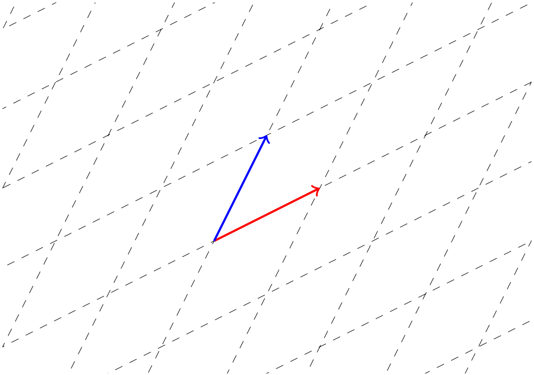
$$[F] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$ Har avbildningen F några egenvektorer?



Visualisering

$$[F] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$ Har avbildningen F några egenvektorer?

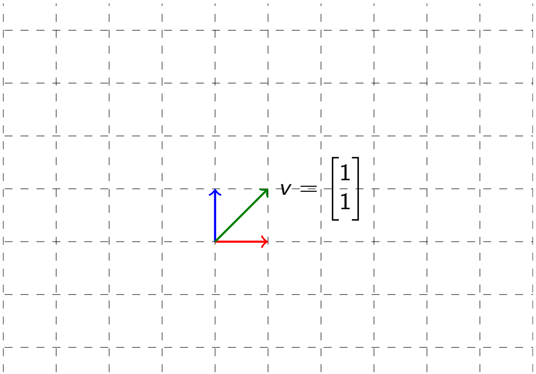


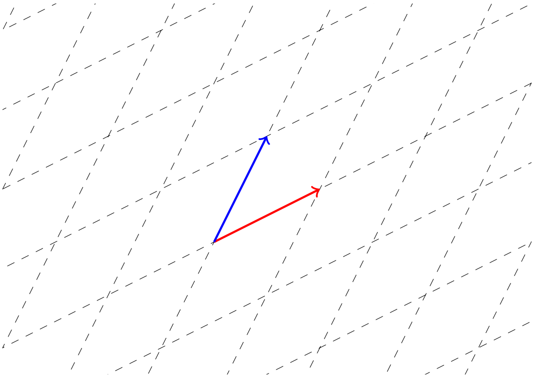


Visualisering

$$[F] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

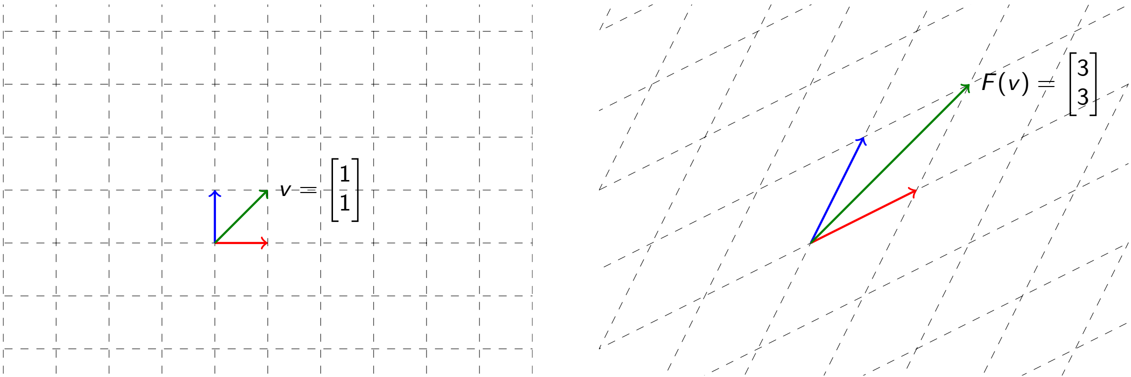
Har avbildningen F några egenvektorer?





Visualisering

$$[F] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$ Har avbildningen F några egenvektorer?



En egenvektor

Låt $[F] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ och $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

En egenvektor

Låt $[F] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ och $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Då har vi

$$F(v) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3v$$

En egenvektor

Låt $[F] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ och $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

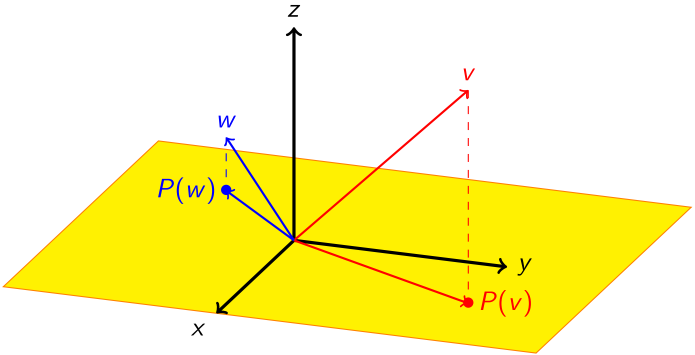
Då har vi

$$F(v) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3v$$

Så F skalar om vektorn v med en faktor 3. Vi säger att v är en **egenvektor** för F, och att 3 är motsvarande **egenvärde** för F.

Egenvärden för projektion

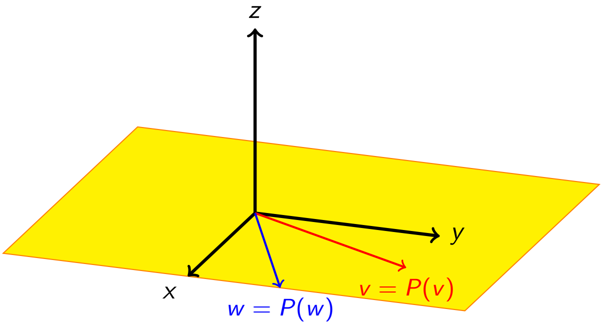
Låt $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara projektion på xy-planet:



Vilka egenvärden och egenvektorer har avbildningen?

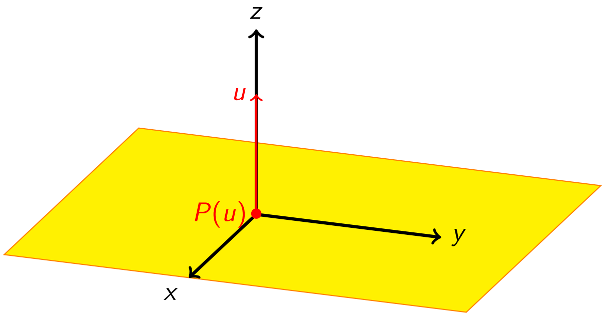
Projektion

Varje vektor v i planet projiceras på sig själv: $P(v) = 1v$, så varje (nollskild) vektor i planet är en egenvektor för P med egenvärde 1.



Projektion

Varje vektor u vinkelrät mot planet avbildas på nollvektorn: $P(u) = 0 = 0u$, så varje (nollskild) vektor av form $t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor för P med egenvärde 0.



Formell definition

Definition

Låt $F : V \to V$ vara en linjär avbildning. Om det finns en **nollskild** vektor $\mathbf{v}$ och ett tal λ så att

$$F(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$$

så säger vi att λ är ett **egenvärde** för F, och att $\mathbf{v}$ är en motsvarande **egenvektor**.

Ett första exempel

Uppgift

Låt $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ och låt $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Är v en egenvektor till A? Är w en egenvektor?

Ett första exempel

Uppgift

Låt $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ och låt $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Är v en egenvektor till A? Är w en egenvektor?

Lösning: v är en egenvektor om $Av = \lambda v$ för något $\lambda \in \mathbb{R}$. Vi har

$$Av = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Ett första exempel

Uppgift

Låt $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ och låt $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Är v en egenvektor till A? Är w en egenvektor?

Lösning: v är en egenvektor om $Av = \lambda v$ för något $\lambda \in \mathbb{R}$. Vi har

$$Av = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = (-2)v.$$

$Av = (-2)v$, så v är en egenvektor för A med egenvärde -2.

Ett första exempel

Uppgift

Låt $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ och låt $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Är v en egenvektor till A? Är w en egenvektor?

Lösning: v är en egenvektor om $Av = \lambda v$ för något $\lambda \in \mathbb{R}$. Vi har

$$Av = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = (-2)v.$$

$Av = (-2)v$, så v är en egenvektor för A med egenvärde -2.

$$Aw = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ett första exempel

Uppgift

Låt $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ och låt $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Är v en egenvektor till A? Är w en egenvektor?

Lösning: v är en egenvektor om $Av = \lambda v$ för något $\lambda \in \mathbb{R}$. Vi har

$$Av = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = (-2)v.$$

$Av = (-2)v$, så v är en egenvektor för A med egenvärde -2.

$$Aw = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \neq \lambda w \quad \text{för något } \lambda.$$

Så w är inte en egenvektor.

Ett andra exempel

Uppgift

Låt $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Då är 3 faktiskt ett egenvärde för B. Hitta alla egenvektorer till detta egenvärde.

Ett andra exempel

Uppgift

Låt $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Då är 3 faktiskt ett egenvärde för B. Hitta alla egenvektorer till detta egenvärde.

Lösning: $X = (x_1, x_2, x_3) \neq 0$ är en egenvektor med egenvärde 3 om $BX = 3X$. Denna matrisekvation kan skrivas $(3I - B)X = 0$:

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 \phantom{{}+x_2} - 4x_3 = 0 \\ -x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad ② \quad ①$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 = 0 \\ \phantom{-x_1 +{}} x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = -3t \\ x_3 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ för } t \in \mathbb{R}.$$

Ett andra exempel

Uppgift

Låt $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Då är 3 faktiskt ett egenvärde för B. Hitta alla egenvektorer till detta egenvärde.

Lösning: $X = (x_1, x_2, x_3) \neq 0$ är en egenvektor med egenvärde 3 om $BX = 3X$. Denna matrisekvation kan skrivas $(3I - B)X = 0$:

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad ② \quad ①$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = -3t \\ x_3 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ för } t \in \mathbb{R}.$$

Slutsats: Varje vektor av form $t(2, -3, 1)$ for $t \in \mathbb{R}$ $(t \neq 0)$ är en egenvektor till B med egenvärde 3.

Del II

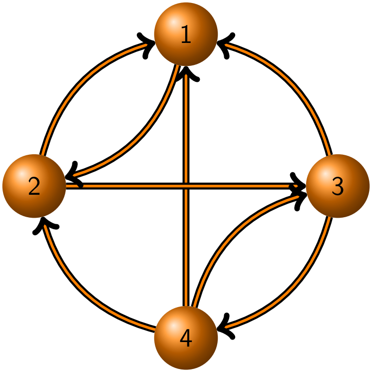
Tillämpningar

Tillämpningar

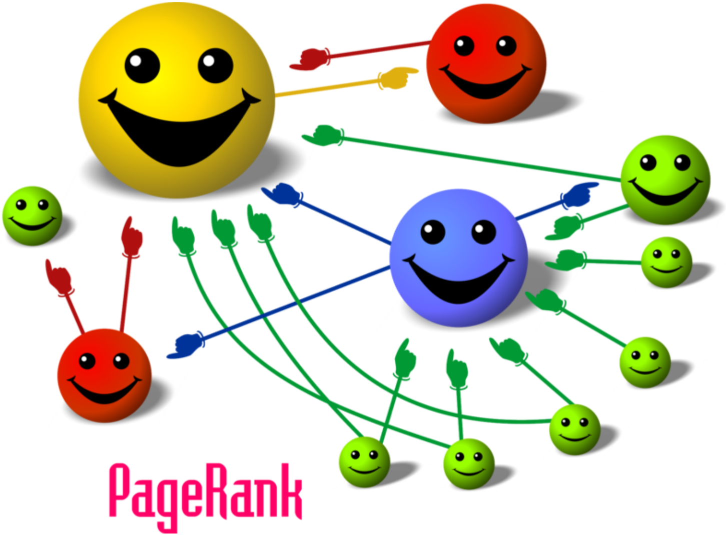
Vad är poängen med egenvärden och egenvektorer?

PageRank

Givet ett nätvärk av webbsidor, hur bör man rangordna dem?



Här är ett nätverk av webbsidor, pilar indikerar länkar.

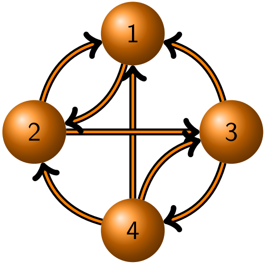

PageRank

PageRank

Låt webbsidornas rankning ges av $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. En bra modell är att varje sida distribuerar sitt värde till över utgående länkar. Till exempel, nod 3 har inkommande länkar från nod 2 och 4, så vi vill ha $x_3 = \frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{3}$.

PageRank

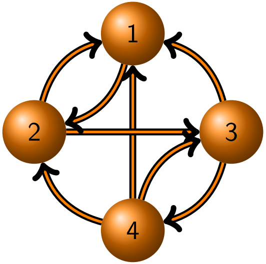
Låt webbsidornas rankning ges av $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. En bra modell är att varje sida distribuerar sitt värde till över utgående länkar. Till exempel, nod 3 har inkommande länkar från nod 2 och 4, så vi vill ha $x_3 = \frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{3}$.



$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

PageRank

Låt webbsidornas rankning ges av $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. En bra modell är att varje sida distribuerar sitt värde till över utgående länkar. Till exempel, nod 3 har inkommande länkar från nod 2 och 4, så vi vill ha $x_3 = \frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{3}$.



$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Detta blir ett egenvärdesproblem: Rankningsvektorn X ska vara en egenvektor med egenvärde 1 till den viktade grannmatrisen för nätet, vi får egenvektorer $X = t(9, 10, 2, 1)$.

Populationsdynamik

Rävar och kaniner bor i en skog. Vid år nummer k finns det x_k kaniner and y_k rävar.

Populationsdynamik

Rävar och kaniner bor i en skog. Vid år nummer k finns det x_k kaniner and y_k rävar.

Antag att populationerna utvecklas enligt

$$\begin{cases} x_{k+1} = 2x_k - y_k \\ y_{k+1} = x_k + 0.8y_k \end{cases}$$

Vad händer med populationen i längden?

Populationsdynamik

Rävar och kaniner bor i en skog. Vid år nummer k finns det x_k kaniner and y_k rävar.

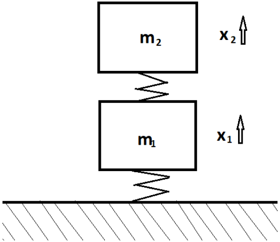
Antag att populationerna utvecklas enligt

$$\begin{cases} x_{k+1} = 2x_k - y_k \\ y_{k+1} = x_k + 0.8y_k \end{cases}$$

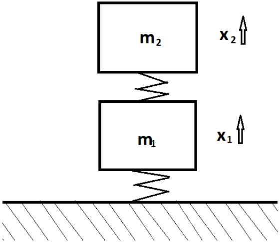
Vad händer med populationen i längden?

Svaret beror på egenvärdena till koefficientmatrisen $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0.8 \end{bmatrix}$

Mekanik


m2
x2
m1
x1

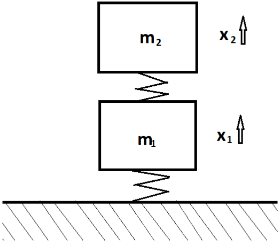
Mekanik



$$\begin{bmatrix} x_1''(t) \\ x_2''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$X''(t) = AX(t)$$

Mekanik

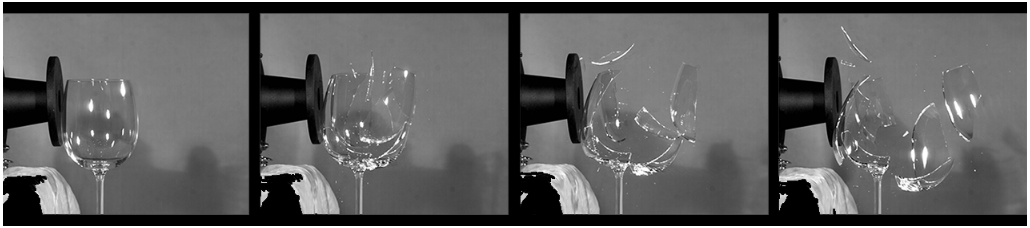


$$\begin{bmatrix} x_1''(t) \\ x_2''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$X''(t) = AX(t)$$

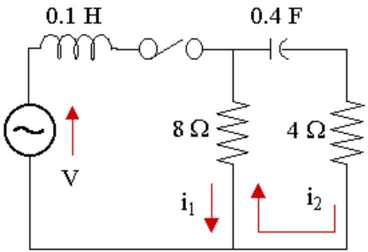
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 e^{\omega i t} \\ b_2 e^{\omega i t} \end{bmatrix} \Rightarrow AX = -\omega^2 X$$

Resonans



Ljud med samma frekvens som glasets egenfrekvens ger vibrationer av ökande amplitud.

Elektriska kretsar



Strömmarna (i_1, i_2) kan beräknas genom att lösa ett egenvärdesproblem.

Partiella differentialekvationer

Nedan ses ett system differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t) \\ x_2'(t) = 5x_1(t) - x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_1(t) + x_2(t) + 5x_3(t) \end{cases}$$

Partiella differentialekvationer

Nedan ses ett system differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t) \\ x_2'(t) = 5x_1(t) - x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_1(t) + x_2(t) + 5x_3(t) \end{cases}$$

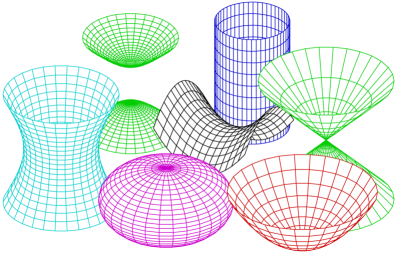
Systemet kan skrivas $X'(t) = AX(t)$. Lösningarnas kvalitativa egenskaper beror på egenvärdena till matrisen A.

Andragradsytor

Lösningarna till ekvationen

$$x^2 - y^2 + z^2 + 4xy - 2yz + 6xz = 5$$

bildar en yta i $\mathbb{R}^3$. Vilken av ytorna nedan motsvarar ekvationen?

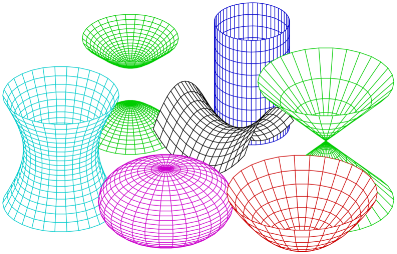


Andragradsytor

Lösningarna till ekvationen

$$x^2 - y^2 + z^2 + 4xy - 2yz + 6xz = 5$$

bildar en yta i $\mathbb{R}^3$. Vilken av ytorna nedan motsvarar ekvationen?



Svaret får man genom att studera egenvärdena till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ansiktsigenkänning

Låt A vara en matris där raderna är ansiktsvektorer.

Ansiktsigenkänning

Låt A vara en matris där raderna är ansiktsvektorer.

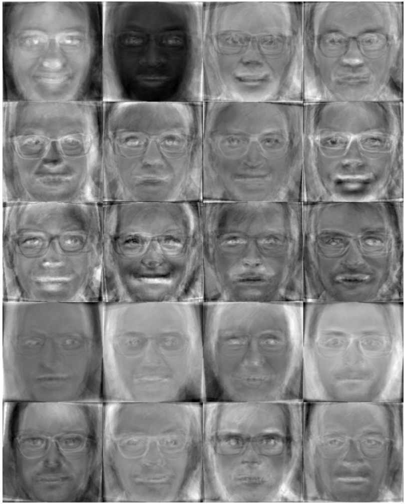
Egenvektorerna till matrisen $A^T A$ kallas egenansikten.

Ansiktsigenkänning

Låt A vara en matris där raderna är ansiktsvektorer.

Egenvektorerna till matrisen $A^T A$ kallas egenansikten.

Egenansikten motsvarande stora egenvärden beskriver bäst variationen i ansiktena i matrisen A.



Del III

Metod för att hitta egenvärden och egenvektorer

Algoritm

Algoritm

Låt A vara en $n \times n$-matris. För att hitta egenvärden och tillhörande egenvektorer för matrisen A:

Algoritm

Algoritm

Låt A vara en $n \times n$-matris. För att hitta egenvärden och tillhörande egenvektorer för matrisen A:

- Lös ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$, lösningarna $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ är egenvärdena.

Algoritm

Algoritm

Låt A vara en $n \times n$-matris. För att hitta egenvärden och tillhörande egenvektorer för matrisen A:

- Lös ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$, lösningarna $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ är egenvärdena.
- För varje egenvärde λ_k, lös det linjära systemet $(A - \lambda_k I)X = 0$. Mängden lösningar (utom nollvektorn) är egenvektorerna motsvarande egenvärdet λ_k.

Algoritm

Algoritm

Låt A vara en $n \times n$-matris. För att hitta egenvärden och tillhörande egenvektorer för matrisen A:

- Lös ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$, lösningarna $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ är egenvärdena.
- För varje egenvärde λ_k, lös det linjära systemet $(A - \lambda_k I)X = 0$. Mängden lösningar (utom nollvektorn) är egenvektorerna motsvarande egenvärdet λ_k.

Definition

Polynomet $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ kallas för det **karakteristiska polynomet** eller **sekularpolynomet**, och ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ kallas den **karakteristiska ekvationen** eller **sekularekvationen** för matrisen A.

Algoritm

Algoritm

Låt A vara en $n \times n$-matris. För att hitta egenvärden och tillhörande egenvektorer för matrisen A:

- Lös ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$, lösningarna $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ är egenvärdena.
- För varje egenvärde λ_k, lös det linjära systemet $(A - \lambda_k I)X = 0$. Mängden lösningar (utom nollvektorn) är egenvektorerna motsvarande egenvärdet λ_k.

Definition

Polynomet $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ kallas för det **karakteristiska polynomet** eller **sekularpolynomet**, och ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ kallas den **karakteristiska ekvationen** eller **sekularekvationen** för matrisen A.

Om λ är ett egenvärde kallas nollrummet $N(A - \lambda I)$ för **egenrummet** motsvarande egenvärdet λ. Detta är ett delrum till $\mathbb{R}^n$ som består av alla egenvektorer till egenvärdet λ (och nollvektorn).

Exempel

Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ vara matrisen för en linjär avbildning F.

Vi har

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 - 1 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

så egenvärdena är 3 och 1. Vi hittar egenvektorer motsvarande egenvärdet 3:

$$(A - 3I)X = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{1}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow (x_1, x_2) = t(1,1).$$

Så varje nollskild vektor på formen $t(1,1)$ är en egenvektor med egenvärde 3.

Exempel

Sedan beräknar vi egenvektorer motsvarande egenvärdet 1:

$$(A - 1I)X = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1 \\ \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2) = t(-1, 1) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exempel

Sedan beräknar vi egenvektorer motsvarande egenvärdet 1:

$$(A - 1I)X = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{-1}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

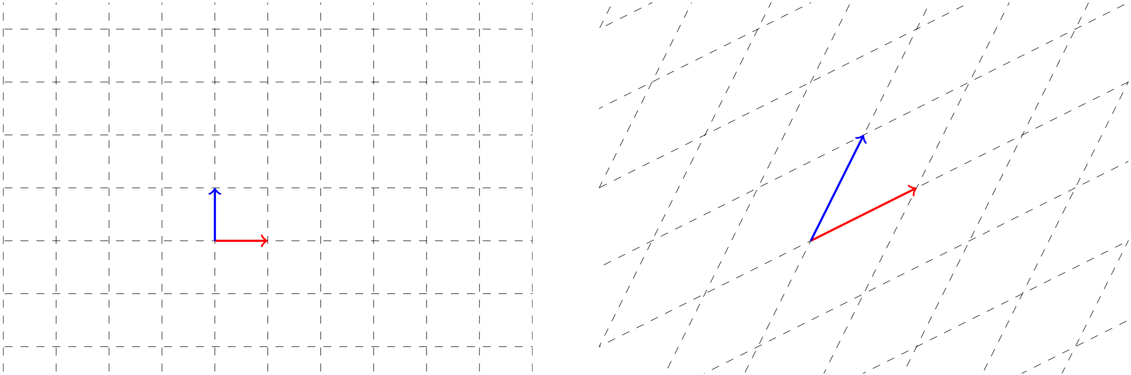
$$\Leftrightarrow (x_1, x_2) = t(-1, 1) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Så sammanfattningsvis:

Egenvärde	Motsvarande egenvektorer
3	$t(1,1) \quad t \in \mathbb{R},\ t \neq 0.$
1	$t(-1,1) \quad t \in \mathbb{R},\ t \neq 0.$

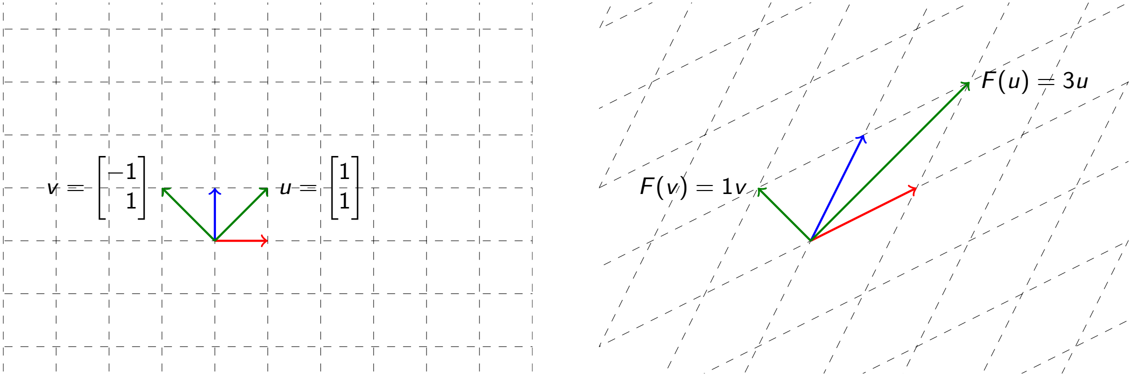
Visualisering

Egenvektorer för avbildningen F med matris $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$



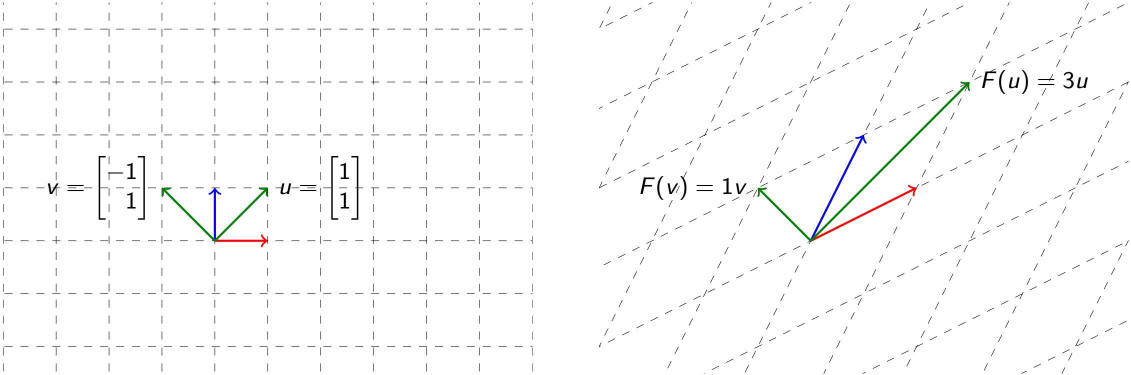
Visualisering

Egenvektorer för avbildningen F med matris $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$



Visualisering

Egenvektorer för avbildningen F med matris $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$



Avbildningen är alltså sträckning i riktningen $(1,1)$ med en faktor 3.