Inlämningsuppgift I

Linjär algebra — ETE325 — VT2025 — Jonathan Nilsson

Instruktioner: Skriv tydligt namn, personnummer, och program (om du går ett) på första sidan. Uppgifterna ska lösas självständigt och utan digitala hjälpmedel. Det är ok att diskutera uppgifterna med andra, men du ska skriva din lösning själv. Skriv fullständiga lösningar med tydliga svar. Skriv lösningarna för hand, använd inte röd penna. Lämna in uppgifterna i nummerordning.

Lämnas in: Senast klockan 17.00 den 12/3 2025. Lämna in handskrivet på ihophäftade papper på föreläsningen. Lösningarna kan annars lämnas i facket märkt ETE325 i B-huset en trappa upp från ingång 21. Sena inlämningar accepteras ej.

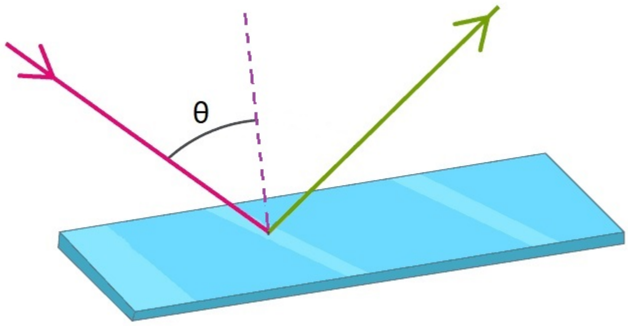
Bonuspoäng till tentan: Dessa inlämningsuppgifter är **inte obligatoriska** men de ger gemensamt 0-4 bonuspoäng till kursens tentamen. Varje uppgift nedan bedöms som 0-6 poäng, så total maxpoäng på inlämningsuppgifterna är 30+30=60 poäng. En total poängsumma på $20/30/40/50$ ger $1/2/3/4$ bonuspoäng till kursens tenta, totalpoängen på tentan är 42. Bonuspoängen kan användas vid kursens tre examenstillfällen, i maj 2025, augusti 2025, och januari 2026.

1. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Lös matrisekvationen $AX - 2A + X = 3I - 2A^t X$.

   (b) Hitta alla matriser som kommuterar med A, alltså de matriser B som uppfyller $AB = BA$.

2. En ljusstråle färdas längs linjen $(x, y, z) = (t - 3, t, -2t + 2)$ där $t \in \mathbb{R}$. Strålen reflekteras i planet med ekvation $2x + y + z = 0$. Beräkna infallsvinkeln θ och ta fram en parameterform för den reflekterade strålen.



3. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Lös ekvationssystemet $AX = \mathbf{0}$. Här är X alltså som vanligt en kolonnmatris $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$.

   (b) Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet av $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av kolonnerna i A. Ange dimensionen för $\mathbb{U}$ och välj en bas för $\mathbb{U}$.

   (c) Vektorn $\mathbf{v} = (1, \frac{3}{2}, 2)$ tillhör $\mathbb{U}$. Ange koordinaterna för $\mathbf{v}$ i den bas du valde i föregående deluppgift.

4. Låt $B = \begin{pmatrix} 1 & c+1 & 1 \\ 2 & 1 & c \\ 2 & c & 1 \end{pmatrix}$ där c är ett reellt tal.

   (a) Avgör för vilka värden på talet c som matrisen B är inverterbar.

   (b) Beräkna B^{-1} när $c = -1$.

   (c) För vilka c är matrisen BB^tB inverterbar? *Tips: Räkna inte!*

5. Vi definierar en *"magisk kvadrat"* som en kvadratisk matris där summan i varje rad och varje kolonn blir lika. Matriserna A, B, och C nedan är alltså alla magiska kvadrater med respektive summor 8, 15, och 3. Notera att summan av diagonalerna inte behöver vara lika.

$A =$

5	3
3	5

$B =$

5	3	7
1	8	6
9	4	2

$C =$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

   (a) Visa att mängden M_n av alla magiska $n \times n$-kvadrater är ett underrum till vektorrummet av alla $n \times n$-matriser.

   (b) Ange dimensionen för M_2, rummet av 2×2 magiska kvadrater, och ta fram en bas för M_2. Ange koordinaterna för matrisen A ovan i den bas du valt.

   (c) ⚔ Ange dimensionen för M_3, rummet av 3×3 magiska kvadrater, och ta fram en bas för M_3. Ange koordinaterna för matriserna B och C ovan i den bas du valt.