Inlämningsuppgift I

Linjär algebra ETE325 VT2026 Jonathan Nilsson

Instruktioner: Skriv tydligt namn, personnummer, och program (om du går ett) på första sidan. Uppgifterna ska lösas självständigt och utan digitala hjälpmedel. Det är ok att diskutera uppgifterna med andra, men du ska skriva din lösning själv, skriv ingenting du inte själv förstår. Skriv fullständiga lösningar med tydliga svar, försök skriva på en nivå så att en genomsnittlig kursdeltagare kan förstå alla steg. Skriv lösningarna för hand, använd inte röd penna. Lämna in uppgifterna i nummerordning. Man behöver inte lösa alla uppgifter - vissa problem markerade med ⚔ är extra kniviga och främst riktade till de som satsar på ett högre betyg.

Lämnas in: Senast klockan 18.00 den 1/4 2026 i samband med föreläsningen. Lämna in handskrivet på ihophäftade papper. Lösningarna kan annars lämnas i facket märkt ETE325 i B-huset en trappa upp från ingång 21. Sena inlämningar accepteras ej.

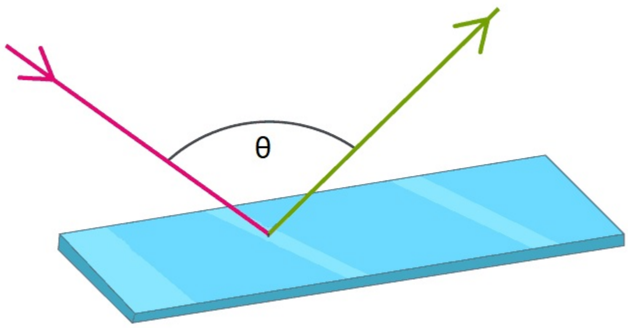
Bonuspoäng till tentan: Dessa inlämningsuppgifter är **inte obligatoriska** men de ger gemensamt 0-3 bonuspoäng till kursens tentamen. Varje uppgift nedan bedöms som 0-6 poäng, så total maxpoäng på inlämningsuppgifterna är 30+30=60 poäng. En total poängsumma på $20/35/50$ ger $1/2/3$ bonuspoäng till kursens tenta, totalpoängen på tentan är 42. Bonuspoängen kan användas vid kursens tre examinationstillfällen, i maj 2026, augusti 2026, och januari 2027.

1. Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

   (a) Ta fram inversen till matrisen C. Beräkna också determinanten av C.

   (b) Lös matrisekvationen $BX + I = 2X + AX + A$.

2. En ljusstråle färdas längs linjen $(x, y, z) = (-4+3t, -5+2t, 1+t)$ där $t \in \mathbb{R}$. Strålen reflekteras i planet med ekvation $x + 2y - z = 3$. Ta fram en parameterform för den reflekterade strålen. Ange också vinkeln θ mellan den infallande strålen och den reflekterade strålen.



3. Låt $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

   (a) Lös ekvationssystemet $MX = \mathbf{0}$. Här är X alltså som vanligt en kolumnmatris $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$.

   (b) Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet av $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av kolonnerna i M. Ange dimensionen för $\mathbb{U}$ och välj en bas för $\mathbb{U}$.

   (c) Vektorn $\mathbf{v} = (\frac{7}{2}, -4, -1)$ tillhör $\mathbb{U}$. Ange koordinaterna för $\mathbf{v}$ i den bas du valde i föregående deluppgift.

4. En parallellepiped ges av

$$\mathcal{P} = \{x_1(1,0,3) + x_2(1,1,2) + x_3(-1,1,1) \mid 0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1\},$$

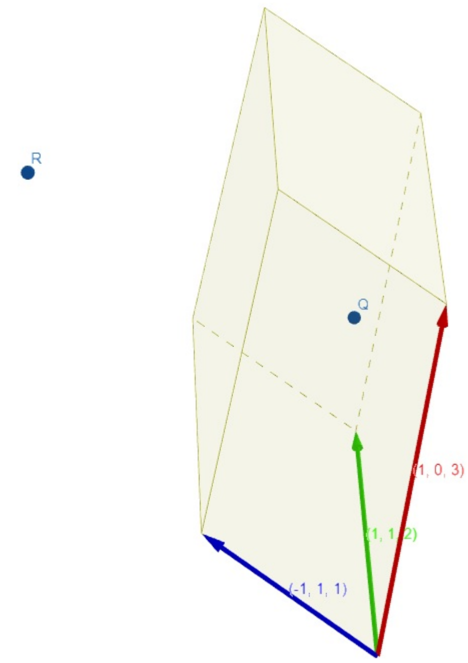
alltså mängden linjärkombinationer av de tre vektorerna där alla koefficienter ligger mellan 0 och 1.

(a) Beräkna parallellepipedens volym.

(b) Ligger punkten $Q = (1,1,3)$ innuti parallellepipeden?

(c) ⚔ Antag att parallellepipeden är ogenomskinlig. Hur många av parallellepipedens sex sidor är synliga från punkten $R = (-2,2,4)$?

☞ På `https://www.geogebra.org/3d/qjh5kew7` kan du se om dina svar ser ut att stämma, men din lösning ska inte baseras på denna visualisering.



5. Vi definierar en *"magisk rektangel"* som en matris där summan i varje rad och varje kolumn blir lika. Matriserna A, B, och C nedan är alltså alla magiska rektanglar med respektive summor 8, 15, och 0. Låt $M_{m\times n}$ vara mängden av alla magiska $m \times n$-rektanglar, detta är ett underrum till vektorrummet av alla $m \times n$-matriser.

$$A = \begin{array}{|c|c|}\hline 5 & 3 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline\end{array} \qquad B = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 8 & 1 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 7 \\ \hline 4 & 9 & 2 \\ \hline\end{array} \qquad C = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -3 & 2 \\ \hline -1 & 3 & -2 \\ \hline\end{array}$$

(a) Ta fram en bas för $M_{2\times 2}$ och ange koordinaterna för matrisen A i denna bas.

(b) ⚔ Ta fram en bas för $M_{3\times 3}$.

(c) ⚔ Visa att om en matris tillhör $M_{m\times n}$ där $m \neq n$, så är summan i varje rad och varje kolumn i matrisen noll.