

~ Inlämningsuppgift II ~

~ Linjär algebra ~ ETE325 ~ VT2025 ~ Jonathan Nilsson ~

Instruktioner: Skriv tydligt namn, personnummer, och program (om du går ett) på första sidan. Uppgifterna ska lösas självständigt och utan digitala hjälpmedel. Det är ok att diskutera uppgifterna med andra, men du ska skriva din lösning själv. Skriv fullständiga lösningar med tydliga svar. Skriv lösningarna för hand, använd inte röd penna. Lämna in uppgifterna i nummerordning.

Lämnas in: Senast klockan 17.00 den 12/5 2025. Lämna in handskrivet på ihopäftade papper på föreläsningen. Lösningarna kan annars lämnas i facket märkt ETE325 i B-huset en trappa upp från ingång 21. Sena inlämningar accepteras ej.

Bonuspoäng till tentan: Dessa inlämningsuppgifter är **inte obligatoriska** men de ger gemensamt 0-4 bonuspoäng till kursens tentamen. Varje uppgift nedan bedöms som 0-6 poäng, total maxpoäng på inlämningsuppgifterna är $30+30=60$ poäng. En total poängsumma på 20/30/40/50 ger 1/2/3/4 bonuspoäng till kursens tenta, totalpoängen på tentan är 42. Bonuspoängen kan användas vid kursens tre examenstillfällen, i maj 2025, augusti 2025, och januari 2026.

1. Låt $\mathbb{U} = [(0, 1, 0, 0), (1, 3, 1, 1), (2, 5, 3, 1)]$. Använd Gram-Schmidt för att ta fram en ON-bas för $\mathbb{U}$. Ta också fram en ON-bas för $\mathbb{U}^\perp$. Ange sedan den vektor i $\mathbb{U}$ som ligger närmast vektorn $v = (3, 4, 2, 1)$.
2. En linjär avbildning ges i standardbasen av matrisen A nedan. Ge en fullständig geometrisk beskrivning av vad avbildningen gör med rummets vektorer.

$$A = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Hitta den cirkel på formen $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ som i minstakvadratmening bäst approximerar följande fyra punkter:

$$\begin{array}{c|cccc} x & -2 & 0 & 1 & 1 \\ \hline y & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Ange även cirkelns radie och medelpunkt, och rita en skiss som visar cirkeln tillsammans med de fyra punkterna.

4. Diagonalisera matrisen A nedan. Med andra ord, ta fram en matris T och en diagonalmatris D så att $A = TDT^{-1}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

5. ✕ Låt $\mathcal{C}[0, 4]$ vara det euklidiska rummet av kontinuerliga funktioner definierade på intervallet $[0, 4]$, där skalärprodukten ges av

$$(f(x)|g(x)) = \int_0^4 f(x)g(x)dx.$$

Låt vidare $\mathcal{P}_1$ vara underrummet till $\mathcal{C}[0, 4]$ som består av alla polynom av grad högst 1, alltså polynom på form $p(x) = ax + b$.

- (a) Använd Gram-Schmidt för att ta fram en ortogonal bas för $\mathcal{P}_1$.
- (b) Hitta den funktion $p(x)$ i $\mathcal{P}_1$ som ligger närmast funktionen $\sqrt{x}$, alltså den funktion för vilken $|p(x) - \sqrt{x}|$ är minimalt. Rita även graferna för funktionerna $p(x)$ och $\sqrt{x}$ i samma bild.