

~ Inlämningsuppgift II ~

~ Linjär algebra ~ ETE325 ~ VT2026 ~ Jonathan Nilsson ~

Instruktioner: Skriv tydligt namn, personnummer, och program (om du går ett) på första sidan. Uppgifterna ska lösas självständigt och utan digitala hjälpmedel. Det är ok att diskutera uppgifterna med andra, men du ska skriva din lösning själv, skriv ingenting du inte själv förstår. Skriv fullständiga lösningar med tydliga svar, försök skriva på en nivå så att en genomsnittlig kursdeltagare kan förstå alla steg. Skriv lösningarna för hand, använd inte röd penna. Lämna in uppgifterna i nummerordning. Man behöver inte lösa alla uppgifter - vissa problem markerade med ✕ är extra kniviga och främst riktade till de som satsar på ett högre betyg.

Lämnas in: Senast klockan 18.00 den 11/5 2026 i samband med föreläsningen. Lämna in handskrivet på ihopäftade papper. Lösningarna kan annars lämnas i facket märkt ETE325 i B-huset en trappa upp från ingång 21. Sena inlämningar accepteras ej.

Bonuspoäng till tentan: Dessa inlämningsuppgifter är **inte obligatoriska** men de ger gemensamt 0-3 bonuspoäng till kursens tentamen. Varje uppgift nedan bedöms som 0-6 poäng, så total maxpoäng på inlämningsuppgifterna är 30+30=60 poäng. En total poängsumma på 20/35/50 ger 1/2/3 bonuspoäng till kursens tenta, totalpoängen på tentan är 42. Bonuspoängen kan användas vid kursens tre examinationstillfällen, i maj 2026, augusti 2026, och januari 2027.

Alla vektorer och matriser nedan anges med avseende på standardbasen i $\mathbb{R}^n$ om inget annat anges.

1. Låt $\mathbb{U} = [(1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 3, 1), (2, 1, 0, 2, 0)]$. Använd Gram-Schmidt för att ta fram en ON-bas för $\mathbb{U}$, och utvidga denna bas till en ON-bas för hela $\mathbb{R}^5$.
2. Ge en fullständig geometrisk beskrivning av vad avbildningen F gör med rummets vektorer, där avbildningsmatrisen för F är

$$[F] = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

3. Ta fram alla egenvärden och egenvektorer för avbildningarna nedan

(a) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ där $F(x, y, z) = (-4x - 9y - 3z, 2y, 6x + 9y + 5z)$

(b) $\times G : M_2 \rightarrow M_2$ där $G(A) = 5A + 3A^T$ (här är M_2 vektorrummet av 2×2 -matriser)

4. Hitta den cirkel på formen $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ som i minstakvadratmening bäst approximerar följande data:

x	0	0	2	2
y	0	1	0	2

Ange även cirkelns radie och medelpunkt och rita en skiss som visar cirkeln tillsammans med de fyra datapunkterna.

5. ✕ Låt $\mathcal{C}[0, 1]$ vara det euklidiska rummet av kontinuerliga funktioner definierade på intervallet $[0, 1]$ där skalärprodukten ges av $(f(x)|g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Låt vidare $\mathcal{P}_1$ vara underrummet till $\mathcal{C}[0, 1]$ som består av alla polynom av grad högst 1, alltså $\mathcal{P}_1 = \{f(x) = ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

(a) Använd Gram-Schmidt för att ta fram en ON-bas för $\mathcal{P}_1$.

(b) Hitta den funktion $f(x)$ i $\mathcal{P}_1$ som ligger närmast funktionen $g(x) = x^2$. Rita även graferna för funktionerna f och g i samma bild.