

Tentamen 190527, Linjär algebra

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift ger upp till tre poäng. För betyget 3/4/5 krävs sammanlagt 8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med två eller tre poäng. Godkända inlämningsuppgifter VT2019 ger 2 poäng att addera till skrivningsresultatet upp till betyget 3. **Markera detta genom att skriva 'G' i rutan för uppgift 8.** Lösningsförslag finns på kursens hemsida efter skrivningen är över. I uppgifterna nedan antas $\underline{e} = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_n)$ vara standardbasen för $\mathbb{R}^n$.

1. (a) Beräkna inversen till matrisen (1p)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Bestäm determinanten av matrisen (1p)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (c) Bestäm minstakvadratlösningen till ekvationssystemet (1p)

$$\begin{cases} x_1 & = 2 \\ x_1 + 2x_2 & = 3 \\ 2x_1 + x_2 & = 1. \end{cases}$$

2. Låt $A : (1, 0, 2)$, $B : (1, 1, 4)$ och $C : (0, -2, -1)$ vara punkter i rummet $\mathbb{R}^3$.

- (a) Ange en ekvation på normalform för det plan i $\mathbb{R}^3$ som innehåller punkterna A , B och C . (1p)

- (b) Beräkna det minsta avståndet från linjen genom punkterna A och B till punkten C . (1p)

- (c) Beräkna arean av triangeln med hörn i A , B och C . (1p)

3. Låt $\bar{f}_1 = 2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$, $\bar{f}_2 = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$ och $\bar{f}_3 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$ vara vektorer i rummet $\mathbb{R}^3$.

- (a) Visa att $\underline{f} = (\bar{f}_1 \ \bar{f}_2 \ \bar{f}_3)$ bildar en bas för $\mathbb{R}^3$. (1p)

- (b) Uttryck vektorerna $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ i basen $\underline{f}$. (1p)

- (c) Ange koordinaterna för vektorn $\bar{v} = 2\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$ i basen $\underline{f}$. (1p)

Var god vänd!

4. Bestäm det största och minsta avståndet från en punkt på kurvan

$$6x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 1,$$

till origo, samt ange i vilka punkter dessa avstånd antas.

5. Låt $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som ges av

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1).$$

(a) Bestäm samtliga egenvärden till F samt en ON-bas av egenvektorer. (2p)

(b) Visa att F är en isometri och beskriv avbildningen geometriskt. Motivera din beskrivning. (1p)

6. Låt U vara Lösningssummet till ekvationen

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0,$$

i $\mathbb{R}^4$. Bestäm en ON-bas för U och utvidga den till en ON-bas för $\mathbb{R}^4$.

7. (a) Ange definitionen av att en avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ är linjär, och ge ett exempel på en linjär avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^3$ som avbildar $(1, 1)$ på $(1, 2, 3)$. (1p)
- (b) Antag att den linjära avbildningen F avbildar $(1, 0, 0)$ på $\frac{1}{3}(2, -1, 2)$ och $(1, 1, 0)$ på $\frac{1}{3}(1, 1, 4)$, samt att avbildningsmatrisen för F är ortonormal. Bestäm alla vektorer som $(1, 1, 1)$ kan avbildas på. (2p)

Lycka till!