

Tentamen 190829, Linjär algebra

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift ger upp till tre poäng. För betyget 3/4/5 krävs sammanlagt 8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med två eller tre poäng. Godkända inlämningsuppgifter VT2019 ger 2 poäng att addera till skrivningsresultatet upp till betyget 3. **Markera detta genom att skriva 'G' i rutan för uppgift 8.** Lösningsförslag finns på kursens hemsida efter skrivningen är över. I uppgifterna nedan antas $\underline{e} = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_n)$ vara standardbasen för $\mathbb{R}^n$.

1. (a) Bestäm determinanten av matrisen (1p)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (b) Lös matrisekvationen $AX - B = BX$, där (2p)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Låt F vara den linjära avbildningen med matris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Ange definitionen av *nollrummet* och *värderummet* för F . (1p)
(b) Bestäm baser för nollrummet och värderummet för F . (2p)

3. Låt F vara den linjära avbildningen med matris

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Ange definitionen av *egenvärden* och *egenvektorer* för F . (1p)
(b) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer för F . (1p)
(c) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer för den sammansatta avbildningen $F \circ F$. (1p)

Var god vänd!

4. Planet $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, skär de två parallella planen $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, och $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, i två linjer. Bestäm dessa linjer och beräkna sedan det minsta avståndet mellan dem.
5. Bestäm, om de finns, det största och minsta avståndet från en punkt på ytan

$$4x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2 = 12,$$

till origo, samt ange i vilka punkter dessa avstånd antas.

6. Ange en ON-bas för ett tredimensionellt underrum U i $\mathbb{R}^4$ som innehåller vektorerna $\bar{u} = (1, 1, 1, 1)$ och $\bar{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$.

7. (a) Ange definitionen av att mängden U är ett *underrum* i $\mathbb{R}^n$. (1p)
- (b) Visa att om U_1 och U_2 är underrum i $\mathbb{R}^n$, så är även mängden

$$U_1 \cap U_2 = \{\bar{u} \in \mathbb{R}^n; \bar{u} \in U_1, \bar{u} \in U_2\},$$

ett underrum i $\mathbb{R}^n$. (2p)

Lycka till!