

Tentamen 200529, Linjär algebra

Alla hjälpmedel utom samarbete är tillåtna. Varje uppgift ger upp till tre poäng. För betyget 3/4/5 krävs sammanlagt 8/14/18 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med två eller tre poäng. Om man har bonus från provräkningarna, dvs minst 18 poäng sammanlagt varav minst 7 poäng på vardera provräkning, kan man tillgodogöra sig 3 poäng på uppgift 1 och behöver därmed inte göra den.

Markera detta genom att skriva '1. Bonus' på första sidan av det du lämnar in. Lösningförslag kommer att finnas på kursens hemsida efter skrivningen är över.

Under tiden som tentan går kan eventuella frågor ställas via mail till *jesper.thoren@liu.se*. I uppgifterna nedan antas $\underline{e} = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_n)$ vara standardbasen för $\mathbb{R}^n$. Alla ev. räkningar ska redovisas tydligt.

1. Denna uppgift behöver du inte göra om du har bonus från provräkningarna.

- (a) Lös matrisekvationen $AXB^{-1} + A = B$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Låt $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, vara den linjära avbildning som först roterar en vektor $\bar{x} = (x_1, x_2)$ i planet 90 grader motsols, och sedan projicerar ortogonalt på linjen $x_2 = 0$. Bestäm avbildningsmatrisen för F .

2. (a) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

- (b) Bestäm minstakvadratlösningen till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

3. Låt L vara den linje som ligger i de båda planen $x_1 - x_2 + x_3 = 1$, och $x_1 + 2x_3 = 2$. Bestäm den punkt S på linjen L som ligger närmast punkten $P = (1, 1, 1)$. Ange även avståndet mellan punkterna S och P .

4. Låt $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, vara den linjära avbildningen som har avbildningsmatris

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ange en ON-bas av egenvektorer samt avbildningsmatrisen för F i denna bas.

5. Bestäm en ON-bas för det underrum $\mathcal{U}$ i $\mathbb{R}^4$ som ges av $x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0$.
Ange därefter det minsta avståndet från $(2, 1, -1, -1)$ till underrummet $\mathcal{U}$.
6. Bestäm det största och minsta avståndet (om de finns) från ytan som ges av

$$7x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 = 1,$$

till origo. Ange också i vilka punkter dessa avstånd antas.

7. Låt $F : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ vara en linjär avbildning sådan att $\dim N(F)=2$. Visa att då är $\dim V(F)=3$, dvs visa att dimensionssatsen stämmer i detta fallet.

Lycka till!