

Tentamen 220530, Linjär algebra

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift ger upp till tre poäng. För betyget 3/4/5 krävs sammanlagt 8/13/18 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med två eller tre poäng. Om man har bonus från provräkningarna, dvs minst 18 poäng sammanlagt varav minst 7 poäng på vardera provräkning, kan man tillgodogöra sig 3 poäng på uppgift 1 och behöver därmed inte göra den. **Markera detta genom att skriva 'B' i rutan för uppgift 1 på omslaget.** Lösningsförslag kommer att finnas på kursens hemsida efter att skrivningen är över. I uppgifterna nedan antas $\underline{e} = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_n)$ vara standardbasen för $\mathbb{R}^n$. Alla ev. räkningar ska redovisas tydligt.

1. Denna uppgift behöver du inte göra om du har bonus från provräkningarna.

- (a) Beräkna inversen till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

- (c) Bestäm ekvationerna för två plan i rummet ($\mathbb{R}^3$) så att skärningen mellan dem bildar linjen $(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(1, 1, -1)$, $t \in \mathbb{R}$

2. Låt $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning med avbildningsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till F .

- (b) Avgör om F är en isometri.

3. Låt L vara linjen genom punkterna $(1, 1, 1)$ och $(2, 3, 3)$. Vilken linje får man om man projicerar alla punkter på L ortogonalt på planet $x_1 + x_2 - x_3 = 0$?

Var god vänd!

4. (a) Bestäm en bas för Lösningsrummet U i $\mathbb{R}^4$ till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & +x_4 = 0 \\ & x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases}$$

och fyll sedan ut den till en bas för $\mathbb{R}^4$.

(b) Ange en avbildningsmatris A till en avbildning $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, så att $U = N(F)$.

(c) Ange en avbildningsmatris B till en avbildning $G : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, så att $U = V(G)$.

5. Rita kurvan som ges av $x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 = 2$. Bestäm, om de finns, det största och minsta avståndet från en punkt på kurvan till origo, samt i vilka punkter dessa avstånd antas.

6. Antag att $U = [(2, -2, 0, 1)]$ är ett underrum i $\mathbb{R}^4$.

(a) Bestäm en ON-bas för U och utvidga den till en ON-bas för $\mathbb{R}^4$.

(b) Ange ekvationer som beskriver U som ett Lösningsrum.

7. Låt $M_{3 \times 3}$ vara vektorrummet som består av alla 3×3 -matriser, och antag att U är delmängden av $M_{3 \times 3}$ som består av alla symmetriska matriser sådana att summan av diagonalelementen är 0 (se t.ex. A nedan).

(a) Visa att U är ett underrum i $M_{3 \times 3}$.

(b) Bestäm en bas för U och bestäm koordinaterna för matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

i denna bas.

Lycka till!