Linköpings Universitet

Tentamen på kursen i linjär algebra: ETE325/TEN1
2024-05-27 kl 08.00-13.00
Examinator: Jonathan Nilsson

Endast skrivverktyg är tillåtna. Tentamen har sju uppgifter där var och en är värd 6p. Maxpoäng är 42p. För betyg 3/4/5 krävs minst 20/28/36 poäng (inklusive eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifterna). För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och välmotiverad lösning som går att följa. Skriv tydligt vad ditt svar är på varje uppgift. Lösningar som är oläsliga eller inte går att följa eller som innehåller endast svar bedöms som noll poäng. Börja varje uppgift på en ny sida och lämna in uppgifterna i nummerordning. Skriv inte med rödpenna. Ett lösningsförslag publiceras på kurshemsidan efter skrivtidens är slut. Alla koordinatvektorer och avbildningsmatriser får antas vara angivna relativt en ON-bas i $\mathbb{R}^n$ om inget annat anges.

---

1. Visa att ekvationssystemet nedan saknar lösning. Ta sedan fram minstakvadratlösningen till ekvationssystemet.
$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = -1 \\ x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

2. Beräkna avståndet mellan punkten $P = (1, 2, 3)$ och planet $\pi:\ x + y - 2z = 12$. Ange också spegelbilden av P i planet π.

3. Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $u_1 = (1, 1, 1, 1)$ och $u_2 = (1, 2, 1, 2)$.
   (a) Ta fram en ON-bas för $\mathbb{U}$ och utvidga denna till en ON-bas för $\mathbb{R}^4$.
   (b) Beräkna projektionen av $v = (1, 2, 2, -1)$ på underrummet $\mathbb{U}$.

4. Definiera vad som menas med *rangen* av en matris. Ange sedan rangen av matrisen M nedan för varje reellt tal a.
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 1 & a+1 & -1 & a \\ -a & 0 & a & 2a \end{pmatrix}$$

5. Ekvationen $2x^2 + 2y^2 + 2xy = 25$ beskriver en kurva i planet. Avgör vilken typ av kurva ekvationen beskriver, och ange de punkter på kurvan som ligger närmast respektive längst ifrån origo.

6. (a) Ange vad *spektralsatsen* säger.
   (b) Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen med standardmatris $[F]$ nedan. Ange en bas för $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till F, och använd ditt resultat till att ge en fullständig geometrisk beskrivning av avbildningen.
$$[F] = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vänd!

7. För varje heltal $n \geq 1$ definierar vi en $n \times n$-determinant

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & \\ 3 & 2 & -1 & & & \\ & 3 & 2 & -1 & & \\ & & 3 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

D_n är alltså determinanten av $n \times n$-matrisen som har 2:or på diagonalen, 3:or ett steg under diagonalen, -1:or ett steg över diagonalen, och nollor på alla andra positioner (ej utskrivna ovan). Ta fram ett explicit uttryck för D_n för varje $n \geq 1$.
Tips: Börja med att utveckla determinanten för att få fram ett rekursivt samband för D_n.

Lycka till!