Linköpings Universitet

Tentamen på kursen i linjär algebra: ETE325/TEN1
2024-08-23 kl 14.00-19.00
Examinator: Jonathan Nilsson

Endast skrivverktyg är tillåtna. Tentamen har sju uppgifter där var och en är värd 6p. Maxpoäng är 42p. För betyg 3/4/5 krävs minst 20/28/36 poäng (inklusive eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifterna). För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och välmotiverad lösning som går att följa. Skriv tydligt vad ditt svar är på varje uppgift. Lösningar som är oläsliga eller inte går att följa eller som innehåller endast svar bedöms som noll poäng. Börja varje uppgift på en ny sida och lämna in uppgifterna i nummerordning. Skriv inte med rödpenna. Ett lösningsförslag publiceras på kurshemsidan efter skrivtidens är slut. Alla koordinatvektorer och avbildningsmatriser får antas vara angivna relativt en ON-bas i $\mathbb{R}^n$ om inget annat anges.

1. Lös matrisekvationen $XA + 2I = A^t + X$ där $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Ta fram en parameterform för skärningslinjen mellan de två planen
$\pi_1 : (x, y, z) = (1 + s + 2t, 4 - s + t, t)$ och $\pi_2 :\ x + 2y - 2z = 3$.

3. Låt $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildningen vars standardmatris är
$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$
Ange en ON-bas för nollrummet $N(F)$. Verifiera också att dimensionssatsen gäller.

4. (a) Ange hur begreppen *egenvärde* och *egenvektor* definieras.
   (b) Diagonalisera matrisen A nedan, hitta alltså en matris T och en diagonal matris D så att $A = TDT^{-1}$.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Ta fram matrisen för avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som först speglar planets vektorer i linjen $y = 2x$, och sedan roterar vektorerna en kvarts varv moturs.

6. Ekvationen $3x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 2xy = 1$ beskriver en yta i $\mathbb{R}^3$. Avgör vilken typ av yta som ekvationen beskriver, och avgör vilka punkter på ytan som ligger närmast respekvive längst ifrån origo.

7. En avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kallas *affin* om det finns en matris A och en vektor w så att $F(v) = Av + w$ för alla $v \in \mathbb{R}^2$. Notera att affina avbildningar inte är linjära förutom när $w = 0$.
   (a) Visa att sammansättningen av två affina avbildningar alltid är affin.
   (b) Visa att rotation en kvarts varv moturs kring punkten $(1, 1)$ är en affin avbildning.

Lycka till!