

Matematiska institutionen vid Linköpings Universitet
Kursnamn: Matematisk grundkurs Utbildningskod: ETE325
Modul: TEN1 (tentamen) 2025-05-27 kl 8.00-13.00
Examinator: Jonathan Nilsson

Endast skrivverktyg är tillåtna. Tentamen har sju uppgifter där var och en är värd 6p. Maxpoäng är 42p. För betyg 3/4/5 krävs minst 20/28/36 poäng (inklusive eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifterna). Om inget annat anges krävs en fullständig och välmotiverad lösning som går att följa på varje uppgift. Skriv också tydligt vad ditt svar är på varje uppgift. Börja varje uppgift på en ny sida och lämna in uppgifterna i nummerordning. Skriv inte med rödpenna. Ett lösningsförslag kommer i efterhand att publiceras på kurshemsidan. Alla koordinatvektorer och avbildningsmatriser får antas vara angivna relativt en ON-bas.

1. Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. På denna uppgift ska *endast svar* anges.

- (a) Ange determinanten av A .
- (b) Ange rangen av A .
- (c) Ange en nollskild vektor i nollrummet till A .
- (d) Ange en nollskild vektor i värderummet till A .
- (e) Ange det karakteristiska polynomet (sekularpolynomet) till A .
- (f) Ange en egenvektor till A som inte ligger i nollrummet till A .

2. Ta fram alla lösningar till ekvationssystemet nedan. Ange också den lösning (x, y, z, w) som ligger närmast origo i $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{cases} x + y - z + w = 5 \\ x - y + 3z + 2w = 4 \\ 4x + 3y - 2z + w = 9 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

3. Ge en fullständig geometrisk beskrivning av avbildningen med standardmatris

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -2 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Avgör om linjen som går genom $P = (2, 1, 0)$ och $Q = (-2, 2, 1)$ skär planet vars ekvation är $x + 2y + 2z = 5$. Beräkna skärningspunkten om en sådan existerar, beräkna annars avståndet mellan linjen och planet.

5. Ta fram standardmatrisen för avbildningen $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ som ges av vektorprodukten

$$F(v) = v \times (2, 3, 5).$$

Ange också alla egenvärden och egenvektorer till F .

6. Ekvationen $3x^2 - 3y^2 + 4z^2 + 8xy = 10$ beskriver en yta i $\mathbb{R}^3$. Avgör vilken typ av yta som ekvationen beskriver, och avgör vilka punkter på ytan som ligger närmast origo.

7. För en $n \times n$ -matris A definierar vi *kommutanten* $\mathcal{C}_A$ som mängden matriser som kommuterar med A :

$$\mathcal{C}_A = \{B \in \text{Mat}_{n \times n} \mid AB = BA\}.$$

- (a) Visa att kommutanten $\mathcal{C}_A$ är ett underrum (delrum) av $\text{Mat}_{n \times n}$.
- (b) Vilka värden på $\dim(\mathcal{C}_A)$ är möjliga när A är en diagonaliserbar 3×3 -matris?
Tips: Undersök först fallet när A är en diagonalmatris.

Lycka till!!