

Matematiska institutionen vid Linköpings Universitet

Kursnamn: Linjär algebra Utbildningskod: ETE325

Modul: TEN1 (tentamen) 2025-08-22 kl 14.00-19.00

Examinator: Jonathan Nilsson

Endast skrivverktyg är tillåtna. Tentamen har sju uppgifter där var och en är värd 6p. Maxpoäng är 42p. För betyg 3/4/5 krävs minst 20/28/36 poäng (inklusive eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifterna). Om inget annat anges krävs lösningar som är fullständiga, välmotiverade, och som går att följa. Inkludera tydliga svar på uppgifterna. Börja varje uppgift på en ny sida och lämna in dem i nummerordning. Skriv inte med rödpenna. Ett lösningsförslag kommer i efterhand att publiceras på kurshemsidan. Alla koordinatvektorer och avbildningsmatriser får antas vara angivna relativt en ON-bas.

1. Ta fram *minstakvadratlösningen* till det olösliga ekvationssystemet nedan.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

2. Lös matrisekvationen

$$XA + 3A^t = A + I + 2X \quad \text{där} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ge också ett exempel på hur man kan ändra en enda siffra i matrisen A så att samma matrisekvation saknar lösningar.

3. En triangel har hörn i punkterna $A = (1, 0, 1)$, $B = (3, 2, 5)$, $C = (7, 3, 4)$. Linjen med parameterform $(x, y, z) = (1 + t, -1 + t, 1 + t)$ skär triangeln, beräkna skärningspunkten. Beräkna också triangelns area.

4. Låt A vara matrisen från uppgift 2 ovan.

(a) Avgör om A är diagonaliserbar.

(b) Ange vad Cayley-Hamiltons sats säger, och verifiera att den gäller för matrisen A .

5. Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet av $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av de tre vektorerna

$$u_1 = (1, 1, 1, 1) \quad u_2 = (2, 3, 4, 3) \quad u_3 = (2, 2, 8, 4).$$

Ta fram en ON-bas för $\mathbb{U}$, och utvidga den till en ON-bas för $\mathbb{R}^4$.

6. En linjär avbildning $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ges av matrisen A nedan med avseende på standardbasen. Ta fram alla egenvärden och egenvektorer för avbildningen, och använd ditt resultat för att ge en geometrisk beskrivning av vad avbildningen gör med rummets vektorer.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

7. En matris A kallas *nilpotent* om $A^n = 0$ för något heltal $n > 0$.

(a) Visa att om A är nilpotent så kan endast noll vara ett egenvärde till A .

(b) Visa att om A och B är nilpotenta matriser som kommuterar, så är även $A + B$ nilpotent.

(c) Visa att om A är nilpotent så är matrisen $I - A$ inverterbar.

Tips: Tänk på hur man härleder formeln för geometrisk summa.

Lycka till!