Lösningsförslag - ETE325/TEN1 - 2024-05-27

1. De två nedersta ekvationerna ger $(x, y) = (2, -1)$ vilket inte uppfyller den översta ekvationen, så systemet saknar lösning. Ekvationssystemet kan skrivas

$$AX = Y \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Systemets minstakvadratlösning är per definition lösningen till systemet

$$A^t AX = A^t Y.$$

Vi beräknar matriserna $A^t A$ samt $A^t Y$ och får systemet nedan, detta löses sedan med matrisinvers:

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{33} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{33} \begin{bmatrix} 25 \\ -19 \end{bmatrix}.$$

Svar: Systemets minstakvadratlösning är $(x, y) = (\frac{25}{33}, -\frac{19}{33})$.

2. Vi konstruerar en linje som går i planet π:s normalriktning och som passerar genom P, en parameterform för denna linje blir:

$$(1, 2, 3) + t(1, 1, -2).$$

Skärningspunken mellan linjen och planet fås genom insättning av denna parameterform i planets ekvation:
$(1 + t) + (2 + t) - 2(3 - 2t) = 12 \iff 6t - 3 = 12 \iff t = \frac{5}{2}$. Spegelbilden på motsatta sidan planet passeras därmed vid dubbla parametervärdet $t = 5$ vilket ger punkten $(1, 2, 3) + (5, 5, -10) = (6, 7, -7) = Q$. Avståndet mellan P och planet är nu halva avståndet mellan P och Q. Avståndet är alltså $\frac{1}{2}|\overline{PQ}| = \frac{1}{2}|(5, 5, -10)| = \frac{1}{2} \cdot 5|(1, 1, -2)| = \frac{5\sqrt{6}}{2}$.
Svar: Avståndet mellan P och π är $\frac{5\sqrt{6}}{2}$. Spegelbilden av P i π är $(6, 7, -7)$.

3. (a) Vi använder Gram-Schmidt för att omvandla u_1, u_2 till en ON-bas för $\mathbb{U}$: Vi ersätter u_2 med

$$u_2 - u_2||_{u_1} = (1, 2, 1, 2) - \frac{6}{4}(1, 1, 1, 1) = \frac{1}{2}\big((2, 4, 2, 4) - (3, 3, 3, 3)\big) = \tfrac{1}{2}(-1, 1, -1, 1).$$

Vi normerar (och byter riktning på den andra) och drar slutsatsen att

$$(f_1, f_2) = \big(\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)\big)$$

är en ON-bas för $\mathbb{U}$. För att utvidga till en ON-bas för $\mathbb{R}^4$ bestämmer vi en bas i $\mathbb{U}^\perp$. En vektor (x, y, z, w) ligger i $\mathbb{U}^\perp$ när dess skalärprodukt med både f_1 och f_2 blir noll, alltså när (x, y, z, w) uppfyller ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x - y + z - w = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x \quad\;\; + z \quad\;\;\, = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \quad\;\; y \quad\;\; + w = 0 \\ x \quad\;\; + z \quad\;\;\, = 0 \end{cases}$$

vilket efter införande av parametrar kan skrivas

$$(x, y, z, w) = (s, t, -s, -t) = s(1, 0, -1, 0) + t(0, 1, 0, -1).$$

De två vektorerna till höger spänner därför upp $\mathbb{U}^\perp$ och eftersom de redan är vinkelräta mot varandra behöver vi bara normera för att få en ON-bas

$$(f_3, f_4) = \big(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)\big) \text{ för } \mathbb{U}^\perp.$$

Svar: $(f_1, f_2, f_3, f_4) = \big(\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{2}(1,-1,1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)\big)$ är en ON-bas för $\mathbb{R}^4$ där (f_1, f_2) är en ON-bas för $\mathbb{U}$.

(b) Med hjälp av vår nya bas kan vi beräkna

$$(1,2,2,-1)||_{\mathbb{U}} = (1,2,2,-1)||_{f_1} + (1,2,2,-1)||_{f_2}$$

$$= \frac{4}{4}(1,1,1,1) + \frac{2}{4}(1,-1,1,-1) = \frac{1}{4}(6,2,6,2) = \frac{1}{2}(3,1,3,1).$$

Svar: Projektionen av v på $\mathbb{U}$ är $\frac{1}{2}(3,1,3,1)$.

4. Rang kan definieras på flera ekvivalenta vis. Rangen av en matris är lika med maximalt antal linjärt oberoende kolonner i A. Detta är samma som maximalt antal linjärt oberoende rader. Om vi ser matisen som en linjär avbildning F så är rangen lika med värderummets dimension $\dim V(F)$. Rangen är också antalet pivot-element i en radekvivalent trappstegsform till matrisen. Någon av ovanstående formuleringar duger som svar.

   Vi radreducerar M till trappstegsform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 1 & a+1 & -1 & a \\ -a & 0 & a & 2a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a^2+2a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+2a \end{pmatrix}$$

   Rangen är antal pivot-element i trappstegsformen, och eftersom $a^2 + 2a = a(a+2)$ så ser vi att:
   Svar: $\operatorname{rang}(M) = 1$ när $a = 0$, $\operatorname{rang}(M) = 2$ när $a = -2$, och $\operatorname{rang}(M) = 3$ annars.

5. Låt $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$. Då är Q en kvadratisk form som beskrivs av matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Vi tar fram egenvärden och egenvektorer till matrisen:

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^2 - 1^2 = (\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

   Så egenvärdena är 1 och 3, båda är positiva så kurvan är en ellips. För egenvärdet 3 löser vi systemet $Av = 3v \Leftrightarrow (A-3I)v = 0 \Leftrightarrow v = t(1,1)$, detta är egenvektorerna till egenvärdet 3. Och eftersom symmetriska avbildningar har vinkelräta egenrum så är $t(1,-1)$ egenvektorer till egenvärdet 1. Vi utnyttjar nu satsen som säger att

$$\lambda_{min}|u|^2 \leq Q(u) \leq \lambda_{max}|u|^2$$

   med likheter när u ligger i motsvarande egenrum. I vårt fall, när u ligger på kurvan har vi $Q(u) = 25$ så

$$|u|^2 \leq 25 \leq 3|u|^2 \quad \text{det vill säga} \quad |u| \leq 5 \quad \text{och} \quad \sqrt{3}|u| \geq 5$$

   Vilket ger att $|u| = 5$ är största avståndet från kurvan till origo vilket infaller då u på kurvan är parallell med $(1,-1)$, alltså i $\pm\frac{5}{\sqrt{2}}(1,-1)$. Analogt ser vi att $|u| = \frac{5}{\sqrt{3}}$ är minsta avståndet från kurvan till origo vilket infaller då u på kurvan är parallell med $(1,1)$, alltså i $\pm\frac{5}{\sqrt{6}}(1,1)$.
   Svar: Kurvan är en ellips. Punkterna på kurvan längst ifrån origo är $\pm\frac{5}{\sqrt{2}}(1,-1)$ och närmast origo ligger $\pm\frac{5}{\sqrt{6}}(1,1)$.

6. (a) Spektralsatsen säger att en avbildning $F : V \to V$ är symmetrisk om och endast om det existerar en ON-bas för V bestående av egenvektorer till F. Alternativt kan man säga att F är *ortogonalt diagonaliserbar* om och endast om F är symmetrisk.

   (b) Egenvärden och egenvektorer kan räknas ut med standardmetoden. Ett snabbare alternativ är att direkt se att matrisens determinant är 0 (alla raderna är parallella), och därför måste 0 vara ett egenvärde. Egenrummet till egenvärdet 0 är samma som avbildningens nollrum, och man ser snabbt att detta består av alla vektorer (x, y, z) som uppfyller $3x + y + z = 0$, och är alltså ett plan i $\mathbb{R}^3$. Matrisen är symmetrisk, så enligt spektralsatsen är egenrummen parvis vinkelräta, därför måste en normalvektor till planet, alltså $n = (3, 1, 1)$, också vara en egenvektor, och vi beräknar

$$F(n) = F(3, 1, 1) = (33, 11, 11) = 11(3, 1, 1),$$

   så $(3, 1, 1)$ är en egenvektor med egenvärde 11. Slutligen väljer vi två (ickeparallella) vektorer med egenvärde 0, alltså två vektorer som uppfyller $3x + y + z = 0$. Vi tar $v_1 = (0, 1, -1)$ och $v_2 = (1, -3, 0)$. Vi tar sedan tredje vektor i egenrummet motsvarande egenvärdet 11, vi väljer $v_3 = n = (3, 1, 1)$. Nu är (v_1, v_2, v_3) en bas i $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till F, där dessutom v_3 är vinkelrät mot både v_1 och v_2. Eftersom $F(v_1) = 0$, och $F(v_2) = 0$, och $F(v_3) = 11v_3$ så drar vi slutsatsen att F geometriskt kan beskrivas som en ortogonal projektion på linjen genom origo i riktningen $(3, 1, 1)$ följt av omskalning med en faktor 11.
   Svar: $(v_1, v_2, v_3) = \big((0, 1, -1), (1, -3, 0), (3, 1, 1)\big)$ är en bas för $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till F. Geometriskt är F en projektion på linjen $t(3, 1, 1)$ följt av omskalning med faktorn 11.

   Kommentar: Enligt spektralsatsen finns det en *ON-bas* (v_1, v_2, v_3) bestående av egenvektorer till F. Men för oss blev inte f_1 vinkelrät mot f_2. Detta kan dock åtgärdas eftersom vi kan välja två vinkelräta vektorer i planet $3x+y+z = 0$, exempelvis $v_1 = (0, 1, -1)$ och $v_2 = v_1 \times n$. Detta behövdes dock inte i denna uppgift, för den geometriska tolkningen är det endast viktigt att v_3 är vinkelrät mot både v_1 och v_2. Flera svar är såklart möjliga på denna uppgift.

7. Vi utvecklar D_n längs rad 1. Den första $(n-1) \times (n-1)$-underdeterminanten som uppkommer är D_{n-1}, och den andra utvecklar vi längs kolonn 1. Då får vi det rekursiva sambandet

$$D_n = 2D_{n-1} + 3D_{n-2}.$$

   Vidare får vi att $D_1 = 2$ och $D_2 = 7$. Detta ger en väldefinierad talföljd D_n som kan skrivas på matrisform som

$$\begin{bmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{n-1} \\ D_{n-2} \end{bmatrix} \quad \text{för alla } n > 2.$$

   Varje matrismultiplikation förskjuter alltså följden ett steg, så förskjuter vi startvärdena $n-1$ steg får vi $\begin{bmatrix} D_{n+1} \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} D_2 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ för $n \geq 1$.

   Härnäst söker vi egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2) - 3 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1),$$

så egenvärdena är 3 och -1. Genom att lösa systemet $(A-3I)v=0$ finner vi att en egenvektor till $\lambda=3$ blir $v_1=(3,1)$, och genom att lösa $(A+I)v_2=0$ finner vi att en egenvektor till egenvärdet -1 är $v_2=(1,-1)$.

Nu kan matrispotensen beräknas med diagonalisering. Ännu lättare blir det om vi börjar med att skriva $(7,2)$ som en linjärkombination av egenvektorer. Koefficienterna får man via ett ekvationssystem. Vi får $\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}=\frac{9}{4}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$. Alltså blir

$$\begin{bmatrix}D_{n+1}\\D_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\1&0\end{bmatrix}^{n-1}\left(\frac{9}{4}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)=\frac{9}{4}3^{n-1}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+\frac{1}{4}(-1)^{n-1}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

Enligt nedersta positionen har vi alltså $D_n=\frac{9}{4}3^{n-1}-\frac{1}{4}(-1)^{n-1}$, vi förenklar och får:

Svar: $D_n=\frac{1}{4}\big(3^{n+1}+(-1)^n\big)$ för varje $n\geq 1$.