# Lösningsförslag - ETE325/TEN1 - 2024-08-23

1. Vi löser först ekvationen algebraiskt:

$$XA + 2I = A^t + X \Leftrightarrow X(A - I) = A^t - 2I \Leftrightarrow X = (A^t - 2I)(A - I)^{-1}$$

där den andra ekvivalensen håller eftersom $A - I$ är inverterbar. Vi sätter in matrisen $A$ från uppgiften och får

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Svar:** $X = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ är ekvationens enda lösning.

2. Vi skriver först om $\pi_1$ på normalform. Eftersom parameterformen för planet $\pi_1$ kan skrivas $(1, 4, 0) + s(1, -1, 0) + t(2, 1, 1)$ så ges en normalvektor till $\pi_1$ av $(2, 1, 1) \times (1, -1, 0) = (1, 1, -3)$, så normalformen är $x + y - 3z = d$, där konstanten $d$ i högerledet fås genom insättning av $(1, 4, 0)$ i ekvationen, detta ger $d = 5$. För att ta fram en parameterform till den sökta linjen löser vi härnäst ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + \phantom{2}y - 3z = 5 \\ x + 2y - 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3z = 5 \\ \phantom{x +} y + \phantom{3}z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \phantom{+ y} - 4z = 7 \\ \phantom{x +} y + \phantom{4}z = -2 \end{cases}.$$

Vi ansätter $z = t$ och får $y = -2 - t$ samt $x = 7 + 4t$.
**Svar:** En parameterform för skärningslinjen ges av $(x, y, z) = (7 + 4t, -2 - t, t)$.

3. För att ta fram nollrummet $N(F)$ löser vi ekvationen $[F]X = 0$. Med $X = (x, y, z, w)^t$ får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + 3z + 2w = 0 \\ -x + y - z \phantom{+ 2w} = 0 \\ 2x + y + 5z + 3w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \phantom{+ y} + z + w = 0 \\ \phantom{x +} y + z + w = 0 \end{cases}.$$

Med $z = s$ och $w = t$ får vi $x = -2s - t$ och $y = -s - t$, så

$$(x, y, z, w) = (-2s - t, -s - t, s, t) = s(-2, -1, 1, 0) + t(-1, -1, 0, 1)$$

och $N(F)$ spänns upp av $v_1 = (-1, -1, 0, 1)$ och $v_2 = (-2, -1, 1, 0)$. Vi använder Gramm-Schmidt för att konvertera $(v_1, v_2)$ till en ON-bas för $N(F)$. Vi ersätter först $v_2$ med $v_2' = v_2 - v_2||_{v_1} = (-2, -1, 1, 0) - \frac{3}{3}(-1, -1, 0, 1) = (-1, 0, 1, -1)$, sedan normerar vi $v_1$ och $v_2'$ (och växlar tecken för att få färre minustecken i svaret) och drar slutsatsen att $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 0, -1)$ och $f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, -1, 1)$ utgör en ON-bas för $N(F)$.

Dimensionssatsen säger att $\dim N(F) + \dim V(F) = 4$ ska gälla. Enligt vår räkning är $\dim N(F) = 2$ så det återstår att visa att även $\dim V(F) = 2$. Värderummet spänns upp av matrisens kolonner $c_1, c_2, c_3, c_4$. Beroendeekvationen visar att $c_3 = 2c_1 + c_2$ och $c_4 = c_1 + c_3$, så $c_1 = (1, -1, 2)$ och $c_2 = (1, 1, 1)$ utgör en bas för $V(F)$, så $\dim V(F) = 2$ vilket stämmer med dimensionssatsen.
**Svar:** $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 0, -1)$ och $f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, -1, 1)$ utgör en ON-bas för $N(F)$. Dimensionssatsen gäller eftersom även $\dim V(F) = 2$ och $2 + 2 = 4$.

4. (a) Om $F : V \to V$ är en linjär avbildning och $F(v) = \lambda v$ för någon nollskild vektor $v \in V$ och något tal $\lambda$, så kallas $v$ en egenvektor för $F$ och $\lambda$ kallas för ett egenvärde för $F$.

   (b) Vi följer standardmetoden.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 2 \\ 1 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(1-\lambda)\big((\lambda-2)(\lambda-5)-4\big) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6) = -(\lambda-1)^2(\lambda-6)$$

så det finns två egenvärden, 1 och 6.

Vi söker egenvektorer för $\lambda = 6$, ekvationen $(A - 6I)v = 0$ ger $v = t(1, 1, 1)$, så $v_1 = (1, 1, 1)$ är en egenvektor till egenvärdet $\lambda = 6$.

Vi söker nu egenvektorer till $\lambda = 1$. Med $v = (x, y, z)$ så ser vi att $(A - I)v = 0$ så fort $x + 2y + 2z = 0$, så alla nollskilda vektorer i detta plan är egenvektorer med egenvärde $\lambda = 1$. Vi väljer två linjärt oberoende vektorer i detta plan för att få en bas för egenrummet: $v_2 = (2, -1, 0)$ och $v_3 = (0, 1, -1)$. Vi bildar matrisen $T$ vars kolonner är egenvektorerna $v_1, v_2, v_3$, och vi bildar diagonalmatrisen $D$ innehållande egenvärdena i samma ordning, sammafattningsvis har vi:

**Svar:** Med $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ gäller $A = TDT^{-1}$.

5. Låt $S$ vara matrisen för speglingen och låt $R$ vara matrisen för vridningen. Eftersom kolonnerna i $R$ är bilderna av basvektorerna under vridningen får vi direkt $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. För att ta fram matrisen $S$ tar vi reda på vart basvektorerna speglas. Eftersom $n = (2, -1)$ är vinkelrät mot speglingslinjen så speglas varje vektor $v$ till $v - 2v||_n$, speciellt skickas $e_1 = (1, 0)$ till

$$(1,0) - 2\frac{(1,0) \bullet (2,-1)}{|(2,-1)|^2}(2,-1) = (1,0) - \frac{4}{5}(2,-1) = \frac{1}{5}(-3,4)$$

och $e_2 = (0, 1)$ skickas till

$$(0,1) - 2\frac{(0,1) \bullet (2,-1)}{|(2,-1)|^2}(2,-1) = (0,1) + \frac{2}{5}(2,-1) = \frac{1}{5}(4,3).$$

Vi sätter dessa bilder som kolonner i vår matris $S$ och får $S = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Matrisen för den sammansatta avbildningen $F$ blir därför $[F] = R \cdot S = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

**Svar:** Den sökta avbildningsmatrisen är $[F] = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

6. Låt $Q(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 2xy$, då beskrivs den kvadratiska formen $Q$ av matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Vi tar fram egenvärdena till $A$ och får att $\det(A -$

$\lambda I) = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\big((\lambda-3)^2-1\big) = (5-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-2)$, så egenvärdena är $\{2,4,5\}$, eftersom alla är positiva är ytan en *ellipsoid*. Vi tar fram egenvektorer till minsta egenvärdet 2 och finner att dessa har form $t(1,-1,0)$, en normerad egenvektor är alltså $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$. Vi tar fram egenvektorer till största egenvärdet 5 och finner att dessa är multipler av $(0,0,1)$. Vi vet att

$$\lambda_{min}|u|^2 \leq Q(u) \leq \lambda_{max}|u|^2$$

med likheter när $u$ ligger i motsvarande egenrum. I vårt fall, när $u$ ligger på ytan har vi $Q(u)=1$, och vi har $\lambda_{min}=2$ och $\lambda_{max}=5$, så den vänstra olikheten säger att $2|u|^2 \leq 1$ d.v.s. $|u| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ med likhet när $u$ ligger på ytan i riktningen $(1,-1,0)$, detta ger att punkterna på ytan *längs ifrån origo* är $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) = \pm(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$.
högra olikheten ovan säger att $1 \leq 5|u|^2$ d.v.s. $|u| \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ med likhet när $u$ ligger på ytan i riktningen $(0,0,1)$, detta ger att punkterna på ytan *närmast origo* är $u = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(0,0,1) = \pm(0,0,\frac{1}{\sqrt{5}})$.
**Svar:** Ytan är en ellipsoid. Punkterna på ytan närmast origo är $\pm(0,0,\frac{1}{\sqrt{5}})$ och punkterna på ytan längs ifrån origo är $\pm(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$.

7. (a) Låt $F$ och $F'$ vara affina avbildningar där $F(v)=Av+w$ och $F'(v)=A'v+w'$. Då gäller $(F\circ F')(v) = F(A'v+w') = A(A'v+w')+w = (AA')v+(Aw'+w)$, så $F\circ F'$ är affin eftersom den beskrivs av matrisen $AA'$ och den konstanta vektorn $Aw'+w$.

   (b) Avbildningen $F$ i uppgiften kan åstadkommas genom att först subtrahera $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$, sedan rotera ett kvarts varv moturs kring *origo*, och sedan addera tillbaka vektorn $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$. Låt $R$ vara rotationen ett kvarts varv moturs kring origo. Enligt vårt resonemang har vi nu

$$F(v) = R(v-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})+(1,1) = R(v)-R\big(\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\big)+\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) = R(v)-\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) = R(v)+\left(\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right).$$

   Detta visar direkt att $F$ är affin: den kan skrivas $F(v)=Av+w$ där

$$A=[R]=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad w=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}.$$