Lösningsförslag - ETE325/TEN1 - 2025-08-22

1. Ekvationssystemet kan på matrisform skrivas $AX = b$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen X är per definition lösningen till systemet $A^tAX = A^tb$, det vill säga $X = (A^tA)^{-1}(A^tb)$ vilket direkt ger

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{8}{33} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{8}{33} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{8}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Svar: Minstakvadratlösningen ges av $x = y = \frac{8}{11}$.

2. Vi löser matrisekvationen algebraiskt:

$$XA + 3A^t = A + I + 2X \Leftrightarrow X(A - 2I) = A + I - 3A^t \Leftrightarrow X = (A + I - 3A^t)(A - 2I)^{-1}.$$

Insättning av matrisen A ger

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -15 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vi noterar att om A byts ut mot $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ så blir $A - 2I$ inte inverterbar, och matrisekvationen blir $X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$ vilket saknar lösning eftersom determinanten av vänsterledet blir 0, medan högerledets determinant är nollskild.

Svar: Matrisekvationens lösning är $X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -15 & 4 \end{pmatrix}$. Om A ersätts med $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ saknar motsvarande matrisekvation lösning.

3. Längden av vektorn $u \times v$ är arean av parallellogrammen som spänns upp av vektorerna u och v. Alltså är triangelns area

$$\frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2}|(2,2,4) \times (6,3,3)| = 3|(1,1,2) \times (2,1,1)| = 3|(-1,3,-1)| = 3\sqrt{11}.$$

Räkningen ovan visar också att $n = (-1, 3, -1)$ är vinkelrät mot både $\overline{AB}$ och mot $\overline{AC}$, vilket betyder att n är en normalvektor till planet som triangeln ligger i. Detta plan har därför ekvation $-x + 3y - z = d$, och insättning av punkten A ger $d = -2$, så planets ekvation kan skrivas $x - 3y + z = 2$. Vi söker skärningspunkten mellan detta plan och linjen i uppgiften. Insättning av parameterformen ger $(1 + t) - 3(-1 + t) + (1 + t) = 2$, vilket ger $t = 3$, och skärningspunkten blir alltså $(4, 2, 4)$.

Svar: Skärningspunkten mellan linjen och triangeln är $(4, 2, 4)$. Triangelns area är $3\sqrt{11}$.

4. (a) Vi har

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4) + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$$

Så vi har ett enda egenvärde 3 med algebraisk multiplicitet 2. Motsvarande egenvektorer ges av lösningarna till $(A-3I)v=0$ vilket ger ekvationssystemet

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad v = t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Så egenrummet till $\lambda = 3$ är ett-dimensionellt och den geometriska multipliciteten är mindre än den algebraiska, därför kan vi dra slutsatsen att:
Svar: Matrisen A inte diagonaliserbar.

(b) Cayley-Hamiltons sats säger att en kvadratisk matris uppfyller sin egen karakteristiska ekvation (sekularekvation), alltså att $p_A(A)=0$.

Enligt vår räkning ovan har vi $p_A(\lambda) = (\lambda-3)^2$ så

$$p_A(A) = (A-3I)^2 = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

vilket stämmer överens med påståendet i Cayley-Hamiltons sats.

5. Vi använder Gram-Schmidt för att transformera (u_1, u_2, u_3) till en ON-bas för $\mathbb{U}$. Vi tar

$$\begin{aligned}
e_1 &= u_1 = (1,1,1,1) \\
e_2 &= u_2 - u_2||_{e_1} = u_2 - \frac{u_2 \bullet e_1}{e_1 \bullet e_1} e_1 = u_2 - 3e_1 = (-1,0,1,0) \\
e_3 &= u_3 - u_3||_{e_1} - u_3||_{e_2} = u_3 - \frac{u_3 \bullet e_1}{e_1 \bullet e_1} e_1 - \frac{u_3 \bullet e_2}{e_2 \bullet e_2} e_2 = u_3 - 4e_1 - 3e_2 = (1,-2,1,0)
\end{aligned}$$

Dessa tre vektorer är en ortogonalbas för $\mathbb{U}$. Vi normerar för att få en ON-bas för $\mathbb{U}$.

$$f_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1) \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0) \quad f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1,0).$$

För att utvidga till en bas för $\mathbb{R}^4$ söker vi en vektor $f_4 = (x,y,z,w)$ som är vinkelrät mot f_1, f_2, f_3 (eller ekvivalent mot e_1, e_2, e_3). Skalärprodukterna $f_4 \bullet e_i = 0$ för $i = 1,2,3$ ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ -x + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad (x,y,z,w) = t(1,1,1,-3),\ t \in \mathbb{R},$$

där vi direkt införde $z=t$. För att f_4 ska få längd 1 väljer vi $t = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Svar: Med $f_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$ $\quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0)$ $\quad f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1,0)$ $\quad f_4 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,1,1,-3)$ så är (f_1, f_2, f_3, f_4) en ON-bas för $\mathbb{R}^4$, där de första tre (f_1, f_2, f_3) är en ON-bas för $\mathbb{U}$.

6. Vi tar fram egenvärden och egenvektorer till A med standardmetoden.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & -2 \\ 4 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ \lambda-1 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 4 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 4 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 4 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\big((-\lambda^2+\lambda+12)-12\big) = -\lambda(\lambda-1)^2,$$

Så egenvärdena är 0 och 1. Egenvektorer för $\lambda = 0$ fås genom att lösa $Av = 0$, vilket ger ekvationssystemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad v = t\left(1,2,4\right).$$

Egenvektorer för $\lambda = 1$ fås genom att lösa $(A-I)v = 0$, vilket ger ekvationssystemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad v \in \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}.$$

Så varje vektor i planet $\pi : x+y-z=0$ avbildas på sig själv, medan vektorer i riktningen $(1,2,4)$ avbildas på noll. Detta betyder att avbildningen är en sned projektion på planet π i riktningen $(1,2,4)$ (det är inte en vinkelrät projektion eftersom $(1,2,4)$ inte är parallell med planets normalvektor $(1,1,-1)$).

Svar: Alla vektorer på form $t(1,2,4)$ med $t \neq 0$ är egenvektorer med egenvärde 0.
Alla vektorer i planet $x+y-z=0$ utom nollvektorn är egenvektorer med egenvärde 1.
Geometriskt är avbildningen en sned projektion på planet $x+y-z=0$ i riktningen $(1,2,4)$.

7. (a) Låt A vara nilpotent med $A^n = 0$. Antag att $Av = \lambda v$ med $v \neq 0$, då får vi

$$0 = 0v = A^n v = \lambda^n v,$$

så $\lambda^n = 0$ och då måste vi ha $\lambda = 0$.

(b) Antag att $A^n = 0$ och $B^m = 0$. Eftersom $AB = BA$ kan potenser av $A+B$ beräknas med binomialsatsen. Vi får speciellt

$$(A+B)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} A^k B^{m+n-k}.$$

Här är varje term faktiskt noll: för $k \geq n$ är $A^k = 0$, och för $k \leq n$ är $B^{m+n-k} = 0$ eftersom exponenten då är $\geq m$. Detta visar att $(A+B)^{m+n} = 0$, så $A+B$ är nilpotent.

(c) Antag att $A^n = 0$. I detta fall kan vi visa att $I-A$ är inverterbar genom att ange inversen explicit: Inversen till $I-A$ är $B = I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$. En explicit räkning ger nämligen

$$(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1}) = (I+A+A^2+\cdots+A^{n-1}) - (A+A^2+A^3+\cdots+A^n) = I - A^n = I$$

eftersom alla termer utom två kunde strykas parvis. Eftersom produkten mellan $A-I$ och B blir identitetsmatrisen har vi $(I-A)^{-1} = B$, och $I-A$ är inverterbar.