

LP-problem

Ett LP-problem:

$$\max z = c^T x \text{ då } Ax \leq b, x \geq 0.$$

Den tillåtna mängden är en polyeder och konvex.

Målfunktionen är linjär och konvex.

Så problemet är konvext.

Var ligger optimum?

$\nabla f(x) = c \neq 0 \Rightarrow$ Gå så långt man får åt något håll. \Rightarrow Hörn.

Sats (Linjärprogrammeringens fundamentalsats)

Om ett LP-problem har begränsad optimallösning, så antas den i (minst) en extrempunkt.

Vårt första exempel

Variabeldefinition:

x_1 = antal enheter Optimus som görs varje timme.

x_2 = antal enheter Rullmus som görs varje timme.

Matematisk modell:

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 &\leq 30 & (1) & \text{ (knappar)} \\ x_1 &\leq 6 & (2) & \text{ (optik)} \\ 6x_1 + 4x_2 &\leq 50 & (3) & \text{ (monteringstid)} \\ x_1 &\geq 0 & (4) & \\ &x_2 \geq 0 & (5) & \end{aligned}$$

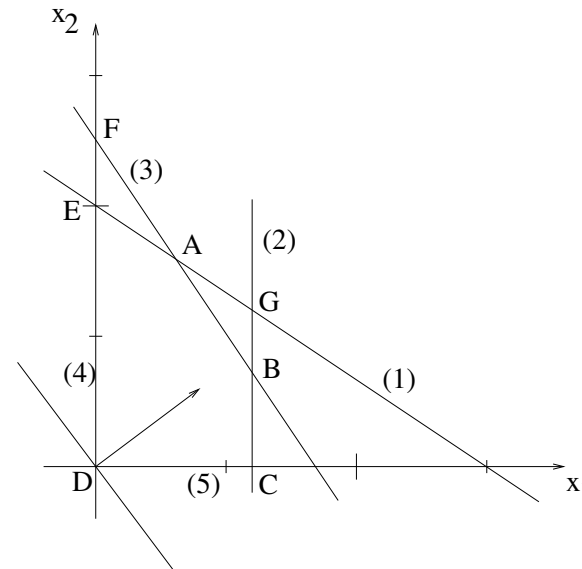
Baslösningar representerar extrempunkter

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 &\leq 30 & (1) \\ x_1 &\leq 6 & (2) \\ 6x_1 + 4x_2 &\leq 50 & (3) \\ x_1 &\geq 0 & (4) \\ &x_2 \geq 0 & (5) \end{aligned}$$

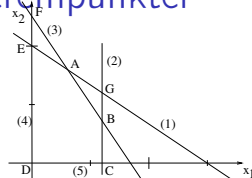
Inför slackvariabler.

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 30 \\ x_1 + x_4 &= 6 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_5 &= 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Baslösningar representerar extrempunkter



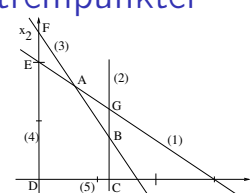
Baslösningar representerar extrempunkter



Hörn-punkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
A	1,3	$x_3 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 3, x_2 = 8, x_4 = 3$
B	2,3	$x_4 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 7/2, x_3 = 15/2$
C	2,5	$x_2 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_3 = 18, x_5 = 14$
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$
E	1,4	$x_1 = 0, x_3 = 0$	$x_2 = 10, x_4 = 6, x_5 = 10$
F	3,4	$x_1 = 0, x_5 = 0$	$x_2 = 25/2, x_3 = -15/2, x_4 = 6$
G	1,2	$x_3 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 6, x_5 = -10$

Punkt F och G ej tillåtna, ty negativa variabelvärden.

Baslösningar representerar extrempunkter



Hörn-punkt	Icke-basvariabler (=0)	Basvariabler	Målfunktion
A	x_3, x_5	x_1, x_2, x_4	$z = 36 - 1/5x_3 - 3/5x_5$
B	x_4, x_5	x_1, x_2, x_3	$z = 69/2 + 1/2x_4 - 3/4x_5$
C	x_2, x_4	x_1, x_3, x_5	$z = 24 + 3x_2 - 4x_4$
D	x_1, x_2	x_3, x_4, x_5	$z = 4x_1 + 3x_2$
E	x_1, x_3	x_2, x_4, x_5	$z = 30 + 2x_1 - x_3$

Punkt A optimal, ty negativa reducerade kostnader.

Baslösningar, hur byta

- Byt en basvariabel i taget.
- Öka ickebasvariabel med positiv reducerad kostnad. (Ökar z .)
- Gör ökningen så stor som möjligt, dvs. så att en basvariabel blir noll och ingen negativ.

Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 30 \\ x_1 + x_4 &= 6 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_5 &= 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Basvariabler: x_3, x_4, x_5 . Dvs. $x_1 = 0, x_2 = 0$ och $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$.

Öka x_1 (verkar bäst). Sätt $x_1 = t, x_2 = 0$, vilket ger

$$\begin{aligned} 2t + x_3 &= 30 \\ t + x_4 &= 6 \\ 6t + x_5 &= 50 \end{aligned}$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

$$x_4 = 6 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 6$$

$$x_5 = 50 - 6t \geq 0 \Rightarrow t \leq 50/6 \approx 8.333$$

Ger $t = 6$, dvs. $x_1 = 6$

och $x_3 = 30 - 12 = 18, x_4 = 6 - 6 = 0, x_5 = 50 - 36 = 14$.

Definition

En **baslösning** fås genom att välja ut m **basvariabler**, sätta **icke-basvariablerna** till noll, och lösa ut basvariablerna mha ekvationssystemet $Ax = b$. Baslösningen är **tillåten** om alla basvariabler får icke-negativa värden.

$$x = (x_B, x_N), A = (B \ N). Bx_B + Nx_N = b \text{ ger } x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

$$\text{Eliminera } x_B \text{ från målfunktionen: } z = c_B^T x_B + c_N^T x_N = \hat{z} + \hat{c}_N^T x_N$$

$$\text{där } \hat{z} = c_B^T B^{-1}b \text{ och } \hat{c}_N = c_N - (c_B^T B^{-1}N)^T.$$

\hat{c}_N kallas **reducerade kostnader**. Baslösningen som fås för $x_N = 0$ och $x_B = B^{-1}b$ är **tillåten** om $B^{-1}b \geq 0$ och **optimal** om $\hat{c}_N \leq 0$.

Sats

Varje extrempunkt i en polyeder kan definieras av (minst) en tillåten baslösning.

Löst exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 &\leq 30 \quad (1) \\ x_1 &\leq 6 \quad (2) \\ 6x_1 + 4x_2 &\leq 50 \quad (3) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Inför slackvariabler, x_3, x_4, x_5 .

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 30 \\ x_1 + x_4 &= 6 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_5 &= 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

1. Välj **inkommande** variabel så att **förbättring** fås: Mest positiv reducerad kostnad, $\max_j \hat{c}_j$. (för max-problem)

Om $\hat{c}_j \leq 0$ för all j : Stopp, optimum funnet.

2. Välj **utgående** variabel så att **tillåtenhet** behålls: Minst kvot mellan högerled och positiv koefficient i inkommande kolumn, $\min_{i:\hat{a}_{ij}>0} \left(\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ij}} \right)$.

Om $\hat{a}_{ij} \leq 0$ för alla i : Stopp, lösningen är obegränsad.

3. Byt bas (pivotera): Eliminera inkommande variabel från alla andra rader. Gå till 1.

Simplexmetoden

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 30 \\ x_1 + x_4 &= 6 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_5 &= 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Starttablå:

Bas	z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	\hat{b}
z	1	-4	-3	0	0	0	0
x ₃	0	2	3	1	0	0	30
x ₄	0	1	0	0	1	0	6
x ₅	0	6	4	0	0	1	50

Inkommande variabel: x_1 . Utgående variabel: x_4 .

Simplexmetoden

Bas	z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	\hat{b}
z	1	0	-3	0	4	0	24
x ₃	0	0	3	1	-2	0	18
x ₁	0	1	0	0	1	0	6
x ₅	0	0	4	0	-6	1	14

Inkommande variabel: x₂. Utgående variabel: x₅.

Bas	z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	\hat{b}
z	1	0	0	0	-1/2	3/4	69/2
x ₃	0	0	0	1	5/2	-3/4	15/2
x ₁	0	1	0	0	1	0	6
x ₂	0	0	1	0	-3/2	1/4	7/2

Inkommande variabel: x₄. Utgående variabel: x₃.

Simplexmetoden

Bas	z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	\hat{b}
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x ₄	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x ₁	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x ₂	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Ingen inkommande variabel. Optimaltablå.

Optimallösning: x₁ = 3, x₂ = 8, z = 36.

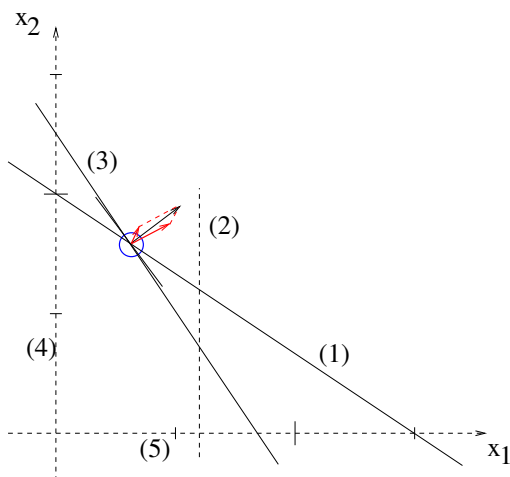
Slack:

Villkor 1 aktivt (x₃ = 0).

Villkor 2 ej aktivt (x₄ = 3).

Villkor 3 aktivt (x₅ = 0).

Simplexmetoden



Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

0. Skaffa en tillåten startbas: $x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$, $c = (c_B, c_N)$.

1. Beräkna B^{-1} .

2. Beräkna högerled: $\hat{b} = B^{-1}b$. Variablernas värden: $x_B = \hat{b}$, $x_N = 0$.

3. Beräkna målfunktionsvärdet: $z = c_B^T x_B$.

4. Beräkna skuggpriser: $y = (c_B^T B^{-1})^T$.

5. Beräkna reducerade kostnader: $\hat{c}_N = c_N - N^T y$ (dvs $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$).

6. Om $\hat{c}_N \leq 0$: Stopp, optimum.

7. Välj **inkommande** variabel x_k så att **förbättring** fås: $\hat{c}_k = \max_j \hat{c}_j$.

8. Beräkna inkommande kolumn för aktuell bas: $\hat{a}_k = B^{-1}a_k$.

9. Om $\hat{a}_k \leq 0$: Stopp, problemet har obegränsad lösning.

10. Välj **utgående** variabel så att **tillåtenhet** behålls: $\frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min_{i: \hat{a}_{ik} > 0} \left(\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} \right)$.

11. Byt bas: Uppdatera B , N , c_B och c_N . Gå till 1.

Simplextablån, teoretiskt

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c^T x \\ \text{då} \quad & Ax + Ix_S = b \\ & x, x_S \geq 0 \end{aligned}$$

Bas	z	x	x_S	\hat{b}
z	1	$-c^T$	$\mathbf{0}$	0
x_S	$\mathbf{0}$	A	I	b

(Starttablå)

Bas	z	x	x_S	\hat{b}
z	1	$c_B^T B^{-1} A - c^T$	$c_B^T B^{-1}$	$c_B^T B^{-1} b$
x_B	$\mathbf{0}$	$B^{-1} A$	B^{-1}	$B^{-1} b$

(Optimaltablå)

B^{-1} kan läsas ut ut optimaltablån.

Och $c_B^T B^{-1}$.

Degeneration och konvergens

Sats

Om det tillåtna området till ett LP-problem är icke-tomt, och inga baslösningar är degenererade, så kommer simplexmetoden att avslutas inom ett ändligt antal iterationer.

I en degenererad baslösning: $\hat{b}_i = 0$.

Kan ge minsta kvot noll. Högerleden ändras då ej. Inkommande variabel ökas ej. En annan baslösning ger samma punkt.

Om flera basvariabler är noll: Många iterationer i samma punkt. Ingen förbättring. Samma bas kan återkomma.

Om samma bas återkommer: Cykling!

Cykling kan förhindras genom speciella val av inkommande och utgående variabler.

Degeneration och konvergens

Definition

En baslösning där en eller flera basvariabler har värdet noll kallas **degenererad baslösning**.

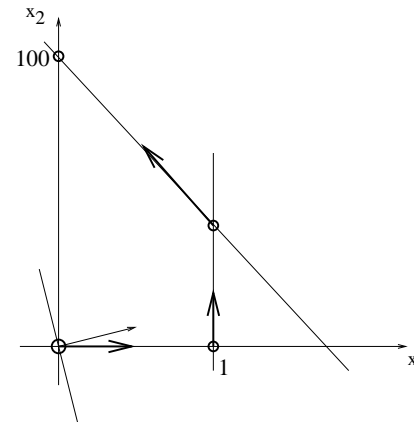
Om inga baslösningar är degenererade:

- Varje extrempunkt motsvaras av exakt en baslösning.
- Varje iteration i simplexmetoden ger ett positivt värde på inkommande variabel, och en strikt förbättring i målfunktionsvärde.
- Man kan därför aldrig komma tillbaka till en redan besökt extrempunkt.
- Det finns ändligt många extrempunkter, så detta kan bara upprepas ett ändligt antal gånger.

Västa fall för simplexmetoden

Berömt exempel: Klee-Minty (1972)

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 10x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad & x_1 \leq 1 \\ & 20x_1 + x_2 \leq 100 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Besöker *alla* extrempunkter.

Västa fall för simplexmetoden

Öka antalet variabler, n .

$$\max z = \sum_{j=1}^n 10^{n-j} x_j$$

$$\text{då } 2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} + x_i \leq 100^{i-1} \quad i = 1, \dots, n$$
$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Simplexmetoden kräver $2^n - 1$ iterationer.

Varje iteration kräver $O(m^2)$ (uppdatering av B^{-1}).

Empiriskt: I medel m^3 iterationer för verkliga problem.

Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler (n), men inte så många bivillkor (m).

Notera att B (och B^{-1}) har storleken $m \times m$.

y har längden m .

x_B har längden m .

Men x_N och \hat{c}_N är väldigt långa. N är jättestor.

Var smart: Läs in a_j och beräkna $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$ för ett j åt gången.

Släng de som inte blir inkommande, $\hat{c}_j \leq 0$.

Tag första x_j med $\hat{c}_j > 0$ som inkommande.

Resultat: Vi behöver aldrig spara något jättestort.

Kan lösa problem som är så stora att vi inte får plats med hela problemet i minnet.