Linköpings universitet

Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Matematik, fortsättningskurs. NMAA07/TEN1

2024-08-27, kl 14-18.

Inga hjälpmedel är tillåtna. Maclaurinutvecklingar bifogas, se baksidan.
Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng.
För betyg *n* (*n* = 3, 4 eller 5) krävs minst 4(n-1) poäng.

---

1. Beräkna följande integraler

   a) $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int x^2 \sin(x^3+1)\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{6x}{x^2+x-2}\,dx$

2. Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2x + 4y$ på triangelområde som begränsas av linjerna $x = -3$, $y = 0$, $x - y = 0$.

3. Bestäm arean av område som ligger mellan x-axeln och kurvan

   $y = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$, $x \geq 1$.

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'(x) + \dfrac{1}{x+1} y(x) = e^{x^2+2x}$ som i punkten $x = 0$ har tangent som är parallell med linjen $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$.

5. Bestäm konstanterna a och b så att

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax^2) + e^{bx} - 1 - x}{\ln(1+x^2)} = -\frac{5}{2}.$$

6. Beräkna $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dxdy$ där D är det begränsade område som ligger mellan linjerna $y = x$, $y = 2x$ och $x = 4$.

7. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då området mellan x-axeln och kurvan $y = \ln x$, $1 \leq x \leq 2$, roteras ett varv kring linjen $x = 4$.

1 a. $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\,dx = \Big/ \begin{matrix} x=t^2 \\ dx=2t\,dt \end{matrix} \Big/ = \int_2^3 \frac{2t^2}{t^2-t}\,dt = \int_2^3 \frac{2t-2+2}{t-1}\,dt$

$\displaystyle = \int_2^3 \left[2+\frac{2}{t-1}\right]dt = \left[2t+2\ln|t-1|\right]_2^3 = 2+2\ln 2$

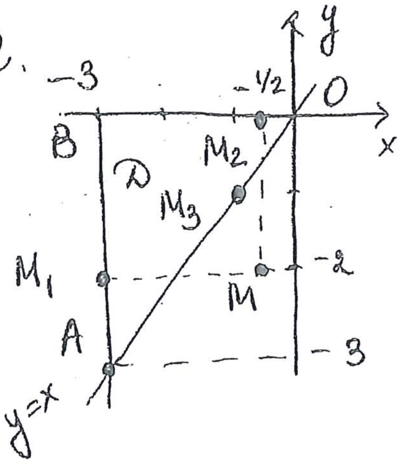
b. $\displaystyle\int x^2 \sin(x^3+1)\,dx \Big/ \begin{matrix} t=x^3+1 \\ dt=3x^2dx \end{matrix} \Big/ = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos(x^3+1)$

c. $\displaystyle\int \frac{6x}{x^2+x-2}\,dx = \int \frac{6x}{(x-1)(x+2)}\,dx = \text{PBU} =$

$\displaystyle = \int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{4}{x+2}\right)dx = 2\ln|x-1|+4\ln|x+2|+$

Svar: a. $2+2\ln 2$; b. $-\frac{1}{3}\cos(x^3+1)+C$; c. $2\ln|(x-1)(x+2)^2|+$

2.



- $\begin{cases} f'_x = 4x+2=0 \\ f'_y = 2y+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=-\frac{1}{2} \\ y=-2 \end{matrix} \quad M=(-\frac{1}{2},-2)\notin D$

- Randpunkter:

AB: $x=-3 \Rightarrow f(-3,y)=y^2+4y+12$

$f'(-3,y)=2y+4=0 \Rightarrow y=-2$

$M_1=(-3,-2)$ $f(M_1)=8$

$f(A)=f(-3,-3)=9$

$f(B)=f(-3,0)=12$

BO: $y=0 \Rightarrow f(x,0)=2x^2+2x$

$f'(x,0)=4x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow M_2=(-\frac{1}{2},0)$

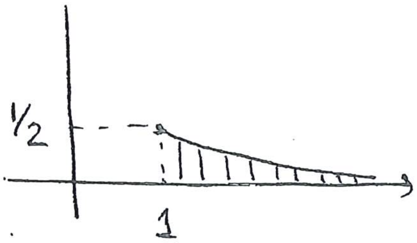
$f(M_2)=-\frac{1}{2}$

AO: $y=x \Rightarrow f(x,x)=3x^2+6x$

$f'(x,x)=6x+6 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow M_3=(-1,-1)$

$f(M_3)=-3$; $f(0,0)=0$

Svar: $f_{max}=12$, $f_{min}=-3$

3. 

$$A = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2} = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$$

$$\int_1^{R} \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int_1^{R} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx =$$

$$= \left[\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right]_1^R = \ln\frac{R+1}{R+2} - \ln\frac{2}{3}$$

$\lim\limits_{R\to\infty} \ln\frac{R+1}{R+2} = 0$ alltså $A = -\ln\frac{2}{3} = \ln\frac{3}{2} >$

Svar: $A = \ln\frac{3}{2}$.

4. $y' + \frac{1}{x+1}y = e^{x^2+2x}$; $IF = e^{\ln|x+1|} = x+1$

$$y'(x+1) + y = (x+1)e^{x^2+2x}$$

$$\left(y(x+1)\right)' = \int (x+1)e^{x^2+2x}\,dx \Big/ \begin{matrix} t = x^2+2x \\ dt = 2(x+1)dx \end{matrix} \Big/ = \frac{1}{2}\int e^t dt$$

$$\frac{1}{2}e^{x^2+2x} + C$$

$$y = \frac{1}{2(x+1)}e^{x^2+2x} + C\cdot\frac{1}{x+1}$$

Vi vet att $y'(0) = -\frac{1}{2}$ och $y'(x) = \frac{2(x+1)^2 e^{x^2+2x} - e^{x^2+2x}}{2(x+1)^2} - C$

Alltså $-\frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} - C \iff C = 1$

Svar: $y = \frac{1}{2(x+1)}e^{x^2+2x} + \frac{1}{x+1}$.

5. Eftersom

$$\ln(1+x^2) = x^2 + O(x^4)$$

$$\sin(ax^2) = ax^2 + O(x^6)$$

$$e^{bx} = 1 + bx + \frac{b^2x^2}{2} + O(x^3)$$

har vi att

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{ax^2 + O(x^6) \cancel{+1} + 1 + bx + \frac{b^2x^2}{2} + O(x^3) \cancel{-1} - x}{x^2 + O(x^4)} =$$

$$(b-1)x + \left(a + \frac{b^2}{2}\right)x^2 + O(x^3)$$

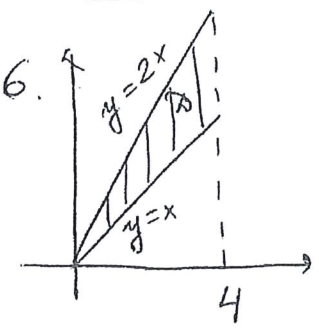
existerar ändligt då och endast då $b-1=0$ dvs $b=1$. I så fall

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{(a+\frac{1}{2})x^2+O(x^3)}{x^2+O(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{a+\frac{1}{2}+\overbrace{O(x)}^{\to 0}}{1+\underbrace{O(x^2)}_{\to 0}}=-\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad a+\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}\quad\Leftrightarrow\quad a=-3$$

Svar: $a=-3$, $b=1$

6.



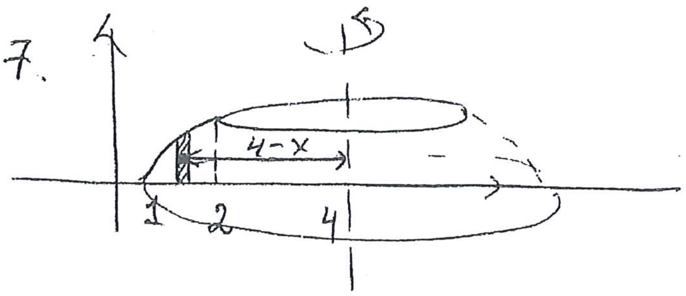
$$\iint_D\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx\,dy=\int_0^4 dx\int_x^{2x}\frac{dy}{1+\sqrt{x}}=$$

$$\int_0^4\frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx\;\Big/\begin{matrix}t=\sqrt{x}\\ dx=2t\,dt\end{matrix}\Big/=2\int_0^2\frac{t^3}{1+t}\,dt=$$

$$=2\int_0^2\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{16}{3}-2\ln 3$$

Svar: $\frac{16}{3}-2\ln 3$

7.



$$dV=2\pi(4-x)\cdot f(x)\,dx\quad\text{där}$$

$$f(x)=\ln x$$

$$V=2\pi\int_1^2(4-x)\ln x\,dx=$$

$$2\pi\left[4(x\cdot\ln x-x)+\left(-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}\right)\right]_1^2=2\pi\left(6\ln 2-\frac{13}{4}\right)$$

ty $\int\ln x\,dx\overset{P.I.}{=}x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx=x\ln x-x+C$ och

$\int x\ln x\,dx\overset{P.I.}{=}\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$

Svar: $V=2\pi\left(6\ln 2-\frac{13}{4}\right)$.